

PERANCANGAN *BLADE AIRFOIL* DENGAN BANTUAN PROGRAM TRANSFORMASI JOUKOWSKY

Toto Rusianto¹, Emy Setyaningsih²

¹Jurusan Teknik Mesin, ²Jurusan Matematika Institut Sains & Teknologi AKPRIND
Yogyakarta,

Masuk: 19 Juni 2014, revisi masuk : 7 Juni 2014, diterima: 5 Juli 2014

ABSTRACT

Design cross section of wind turbine blades with airfoil cross-section can be made from a mathematical approach. The mathematical formula was discussed for airfoil shape from Joukowski equation, that was developed by Nikolai Zhukovsky Egorovich. The problems would appear if used the Joukowski equation settlement for design with manual, it could take a long time. The problem solving for the mathematical could use graphic user interfaces (GUI) program and the design for implementation could use computer aided design (CAD) program. The Joukowski transformation was performed by conformal mapping through the transformation of a complex function from one coordinate system to another, which circle shape was transformed to airfoil shape. Ideal airfoil shape was obtained with observed of the transformation radius and center of the circle.

Keywords: *airfoil, Joukowski, GUI, CAD, transformation.*

INTISARI

Pembentukan penampang bilah kincir angin dengan penampang *airfoil* dapat dibuat dengan pendekatan matematik. Rumusan atau persamaan matematik yang membahas bentuk *airfoil* adalah persamaan Joukowski, yang dikembangkan oleh Nikolai Yegorovich Zhukovsky. Penyelesaian persamaan Joukowski dengan manual akan membutuhkan waktu yang lama. Untuk memudahkan penyelesaian persamaan menggunakan bantuan program *Graphic User Interfaces* (GUI). Sedang rancangan desain grafis menggunakan program *computer aided design* (CAD). Program GUI dapat membantu penyelesaian persamaan matematik menjadi lebih cepat dan akurat. Untuk menghasilkan tranformasi *airfoil* yang ideal harus memperhatikan jari-jari dan pusat lingkaran yang akan ditranformasikan. Bentuk ideal *airfoil* diperoleh dari besarnya pergeseran titik pusat lingkaran ke arah sumbu X lebih kecil atau sama dengan selisih perubahan jari-jari dari keadaan standar (jari-jari sama dengan satu). Jika besarnya pergeseran lebih besar dari selisih tersebut akan terjadi loop pada *trailing edge* *airfoil*. Pergeseran titik pusat lingkaran ke arah sumbu Y menjadikan *airfoil* terdapat *mean chamber line*. Bentuk ideal *airfoil* diperoleh dari besarnya pergeseran titik ke arah sumbu Y lebih kecil atau sama dengan selisih perubahan jari-jari dari keadaan standar. Jika besarnya pergeseran lebih besar akan terjadi *mean chamber line* memotong *upper chamber line*.

Kata kunci: *airfoil, Joukowski, GUI, CAD, tranformasi.*

PENDAHULUAN

Nikolai Yegorovich Zhukovsky (English: Jaoukowsky) (Rusia: Николай Егорович Жуковский; 17 Januari 1847 - 17 Maret 1921) adalah seorang ilmuwan Rusia, pendiri yayasan *modern-aero* dan hidrodinamika. Zhukovsky adalah orang yang pertama kali melakukan studi tentang aliran udara. Nama biasanya

adalah romanised yang dikenal sebagai Joukovsky atau Joukowsky dalam literatur. Zhukovsky lahir di desa Orekhovo, Oblast Vladimir. Dia lulus dari Universitas Moskow pada tahun 1868 (Gutierrez, 2003). Dia adalah ilmuwan pertama yang menjelaskan secara matematis asal angkat aerodinamis, melalui hipotesis sirkulasi-nya, yang

¹ toto@akprind.ac.id,

² emypurnomo@akprind.ac.id

pertama untuk dimensi gaya angkat yang dihasilkan oleh sebuah benda yang bergerak melalui fluida ideal yang proporsional terhadap kecepatan dan sirkulasi benda. Melalui konformal matematika transformasi yang pertama, untuk menentukan bentuk profil aerodinamika yang memiliki elemen penting hidung bulat (*nose/leading edge*) permukaan ganda (ketebalan terbatas), melengkung atau lurus, dan ekor tajam (*trailing edge*). Ia juga membangun terowongan angin (*wind tunel*) pertama di Rusia (Gutierrez, 2003).

Pembentukan penampang bilah *airfoil* dapat dilakukan dengan pendekatan matematik. Rumusan atau persamaan matematik yang membahas bentuk *airfoil* adalah persamaan Joukowski, yang dikembangkan oleh Nikolai Yegorovich Zhukovsky, seperti yang telah diterangkan di atas. Persamaan Joukowski memerlukan penyelesaian perhitungan secara matematik, penyelesaian apabila dilakukan dengan manual akan membutuhkan waktu yang cukup lama. Untuk memudahkan penyelesaian persamaan matematik tersebut digunakan bantuan program komputer yaitu program Matlab sedang rancangan desain grafis dari rancangan menggunakan program CAD.

Untuk mendapatkan suatu desain bentuk bilah kincir angin yang aerodinamis yaitu bentuk *airfoil*. Pendekatan matematik untuk mendapatkan penampang bentuk *airfoil* adakan tranformasi Joukowski. Untuk dapat menyelesaikan persamaan tersebut digunakan program bantu Matlab, data yang dihasilkan dapat ditampilkan dalam bentuk grafik. Bentuk grafik yang diharapkan adalah bentuk *airfoil*, dari bentuk tersebut dengan bantuan program CAD didesain menjadi sebuah bentuk bilah kincir angin.

Batasan masalah yang digunakan meliputi: Analisa terhadap persamaan matematika tranformasi Joukowski, dengan mentranformasikan bentuk lingkaran pada bidang kompleks Z dengan variasi bentuk geometri lingkaran, variasi meliputi jari-jari lingkaran dan titik pusat lingkaran

(Dauhoo, 2003). Analisa tranformasi dilakukan dengan bantuan program Matlab. *Figure airfoil* hasil dari program Matlab diklasifikasikan dalam standar NACA. Hasil *figure* tranformasi bentuk geometri dijadikan acuan untuk mendisain penampang bilah kincir angin. Perancangan dengan menggunakan bantuan program CAD. Hasil tampilan berupa desain rancangan 3D.

Tujuan yang diperoleh antara lain adalah: Mengembangkan proses pembelajaran dari aplikasi matematika dalam bidang teknik mesin, yang berhubungan dengan pemetaan bilangan kompleks. Menyelesaikan bentuk persamaan matematika bilangan kompleks melalui transformasi/*conformal mapping* (Eichstaedt, 2007) dengan bantuan program komputer. Mendesain bilah kincir angin dengan bantuan persamaan matematika dan program komputer, untuk mendapatkan bilah *airfoil* yang aerodinamis.

METODE

Objek penelitian meliputi a). Analisa terhadap bilangan kompleks serta model transformasi. b). Analisis terhadap penyelesaian persamaan transformasi Joukowski dari sebuah persamaan lingkaran pada bidang kompleks z. c). Penggunaan program Matlab untuk menyelesaikan persamaan transformasi Joukowski, baik penyelesaian berupa numerik maupun penyelesaian berupa *Graphic User Interfaces* (GUI) (Mathwork, 2011). d). Penggunaan program CAD Profesional, untuk merancang bilah *airfoil* dengan berupa tampilan 3D, sebagai hasil dari GUI pada program Matlab..

Pengujian

- a. Pengujian meliputi analisa pada persamaan transformasi Jaoukowski

$$(Kreyszig, 2006) \quad w = z + \frac{b^2}{z},$$

dengan memvariasikan nilai b atau membuat jari-jari lingkaran pada bidang Z dengan variase trtentu, sehingga hasil tranformasi juga akan bervariasi. Membuat pergeseran pada titik pusat lingkaran pada bidang Z

- Pergeseran ke arah sumbu X negatif
 - pergeseran ke arah sumbu Y positif
 - dan pergeseran ke dua arah sumbu X dan Y.
- b. Memformulasikan perubahan jari-jari dan pergeseran titik pusat dalam tampilan GUI.
- c. Menganalisa hasil tranformasi berupa GUI kedalam bentuk standar airfoil standar NACA. Menentukan besaran *chord*, dan profil *chamber line*.
- d. Perancangan bentuk 3D dari hasil tampilan GUI. Hasil tampilan GIU merupakan tampilan 2D penampang airfoil dengan tampilan penampang tersebut, dijadikan dasar dalam mendesain bilah airfoil kincir angin melalui program CAD.

PEMBAHASAN

Analisis Transformasi Bilangan Komplek

Sejumlah kompleks dapat dipandang sebagai titik atau vektor posisi dalam sistem koordinat dua dimensi Cartesian disebut bidang kompleks atau diagram Argand. Angka-angka secara konvensional diplot menggunakan bagian yang nyata sebagai komponen horizontal, dan bagian imajiner sebagai vertikal. Koordinat polar bilangan kompleks, sebuah bilangan kompleks $a + bi$ yang digambarkan dalam diagram Cartisian, memiliki jari-jari atau panjang (r), $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ adalah modulus dari $a + bi$ dan titik point pada koordinat $p(a,b)$ dalam bidang datar Gauss Kooordinat titik P secara lingkaran goniometric dapat dinyatakan ($\cos(t)$ dan $\sin(t)$), sudut θ adalah jumlah radian atau dinamakan argument dari $a + bi$ (Solomentsev, 2001).

Persamaan lingkaran yang berpusat di O (0,0) dan berjari-jari r berlaku persamaan:

$$x^2 + y^2 = r^2 \dots\dots\dots(1)$$

Lingkaran dengan pusat bergeser dari titik (0,0), maka persamaan lingkaran yang berpusat di P (sx,sy) dan berjari-jari r berlaku maka persamaan pada lingkaran tersebut adalah:

$$(x-sx)^2 + (y-sy)^2 = r^2 \dots\dots\dots(2)$$

Sebuah fungsi transformasi diterapkan ke fungsi asli untuk melakukan pemetaan. Aplikasi aerodinamika pada transformasi Joukowski, fungsi yang paling umum digunakan adalah persamaan (Spiegel, 1983 dan Kreyszig, 2006)

$$w = z + \frac{1}{z} \dots\dots\dots(3)$$

Analisa Menggunakan Matlab

Bentuk kurva airfoil yang dihasilkan dari transformasi merupakan bentuk persamaan lingkaran dengan titik pusat tidak di (0,0) tetapi di (sx,sy), untuk mendapatkan lingkaran dengan titik pusat di (sx,sy) dapat dilakukan pergeseran pusat lingkaran (0,0). Pergeseran bisa ke arah sumbu x negatif atau x positif dan y negatif atau y positif. Posisi letak lingkaran yang digeser tersebut akan menghasilkan persamaan lingkaran baru persamaan 2.

Penulisan persamaan lingkaran dalam program matlab dapat diasumsikan terjadinya pergeseran pada setiap koordinat sesuai dengan perubahan titik pusat lingkaran dari (0,0) dalam hal ini dinyatakan dengan (sx, sy). Berikut penulisan program persamaan lingkaran asal dengan pusat (0,0) dengan jari-jari input r. ditransformasikan ke persamaan lingkaran dengan pergeseran (sx,sy), input sx (pergeseran arah sumbu x) dan sy (pergeseran arah sumbu y). persamaan lingkaran hasil pergeseran tersebut kemudian di trasformasikan dalam bilang kompleks $z = x + yi$ ke bidang w dengan transformasi $w(u,vi) = z + 1/z$ (Gambar 1) *figure* hasil dari program menu *m-file* Matlab. Berikut penulisan program *m-file* Matlab:

```
%persamaan lingkaran (x-sx)^2 +(y-
sy)^2 =r^2, ditransformasikan w=z+1/z
r=input('nilai r : ');
x=-1*r:0.01:r;
y1=sqrt(r.^2-x.^2);
y2=(-1)*y1;
sx=input('pergeseran arah x : ');
sy=input('pergeseran arah y : ');
x1=x+sx;
y3=y1+sy;
```

```

y4=y2+sy;
u=x1+(x1./(x1.^2+y3.^2));
v1=y3-(y3./(x1.^2+y3.^2));
v2=y4-(y4./(x1.^2+y4.^2));
subplot(2,2,1),plot(x,y1,x,y2),title
('lingkaran dasar');
subplot(2,2,3),plot(x1,y3,x1,y4),a
xis([min(x1)-1.5 max(x1)+1.5
min(y4)-1
max(y3)+1]),title('pergeseran
lingkaran');
    
```

```

subplot(2,2,4),plot(u,v1,u,v2),axis
([min(u)-2 max(u)+2 min(v2)-1
max(v1)+1]),title('airfoil');
    
```

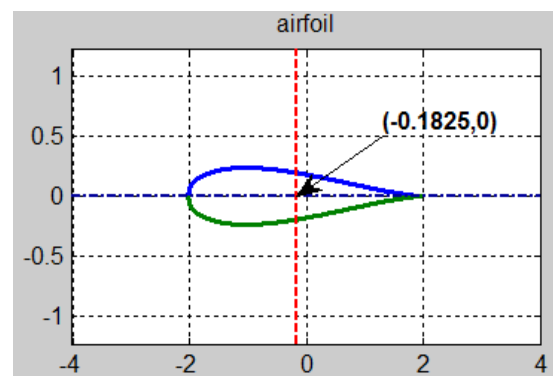
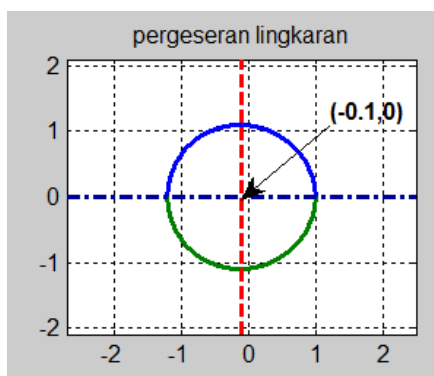
melalui command windows, masukan nilai-nilai parameter:

“nilai r = 1.1”

“pergeseran arah x = -0.1”

“pergeseran arah y = 0”

Hasil dapat dilihat pada Gambar 1



Gambar 1. Hasil pergeseran lingkaran titik pusat (-0.1, 0) Kurva Airfoil hasil transformasi titik pusat menjadi (-0.1825, 0)

Rancangan GUI

Berikut sebagian hasil program yang ditampilkan oleh matlab dari hasil perancangan GUI untuk tranformasi Joukowski. Pengujian dari penelitian ini dari program Matlab GUI parameter yang digunakan un ntuk mengamati perubahan hasil transformasi dengan mengubah ukuran lingkaran yaitu dengan memvariasikan jari-jari lingkaran dari persamaan dasar lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$. Perubahan dari hasil transformasi dapat dilihat dari Tabel 1. Dari hasil ujicoba dari Tabel 1 terlihat bahwa dengan semakin besar jari-jari lingkaran awal pada bidang z akan menghasilkan bentuk elips yang semakin besar pula perubahan tersebut merupakan linier. Akan tetapi perubahan terhadap arah sumbu u dan v perubahan linier dengan gradien yang tidak sama.

Selain jari-jari lingkaran yang divariasikan pergeseran lingkaran juga divariasikan dengan persamaan lingkaran $(x + sx)^2 + y^2 = r^2$, dalam hal ini pergeseran titik pusat ke arah sumbu x negatif, sedang pergeseran arah y ($sy = 0$), untuk jari-jari lingkaran ditentukan konstan $r = 1,3$. Hasil

transformasi dapat dilihat pada Tabel 2. Dari Tabel 2. bentuk hasil transformasi memiliki perubahan dari elips menjadi airfoil dengan *tail* yang menjadi lancip. Dengan bertambah besar pergeseran titik pusat lingkaran yang ditransformasikan maka *tail* mengalami loop, sehingga bentuk kurva menjadi loop angka 8, loop terjadi apabila pergeseran $sx > (1-R = 1+sx)$ dari selisih jari standar $r = 1$ pada persamaan $x^2 + y^2 = 1$ dengan lingkaran $(x+sx)^2 + y^2 = (1+sx)^2$.

Untuk jari-jari lingkaran yang besar pada titik sumbu u nilai oordinat v dapat menjadi tak terhingga, jika pergeseran terus diperbesar akan terjadi loop ganda. Jika semakin besar lagi akan kembali ke bentuk garis linier dan berulang lagi membentuk airfoil, loop dan daouble loop, dengan mengalami pergeseran absis ke arah sumbu u negatif.

Parameter lain yang dapat divariasikan adalah jari-jari dengan pergeseran pusat lingkaran konstan, pusat lingkaran ditentukan ke arah sumbu x negatif ($sx = -0,3$) dan arah y tidak ada pergeseran ($sy = 0$). Hasil dari proses transformasi dapat dilihat pada Tabel 3.

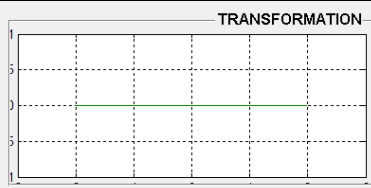
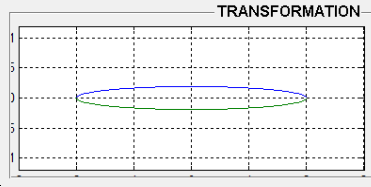
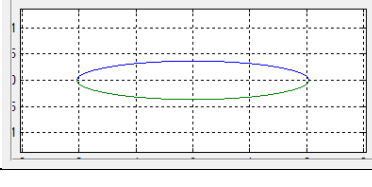
Tabel 4 menunjukkan hasil transformasi airfoil simetri dengan nilai $s_y = 0$, variasi nilai s_x .

Airfoil dengan bentuk yang aerodinamis dapat menghasilkan fenomena yang unik terhadap karakteristik gaya pada airfoil itu sendiri jika berada dalam suatu aliran fluida (Kundu, 2004). Pesawat dapat terbang karena adanya gaya angkat (*lift force*) oleh sayap pesawat yang berpenampang airfoil (www.cfd4aircraft.com, 2013) bilah kincir airfoil angin dapat berputar lebih cepat karena adanya gaya dorong (*drag force*). Berikut figure airfoil hasil program Matlab GUI, untuk beberapa tipe airfoil.)arameter transformasi

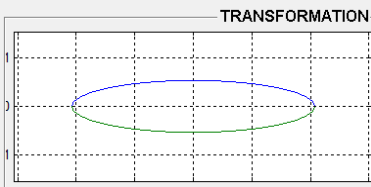
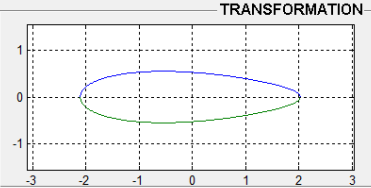
jari-jari lingkaran yang bervariasi $R = 1,1, 1,2$, dan $1,3$ dengan pergeseran titik pusat $s_x = -0,1$ dan $s_y = 0,1$ (titik pusat lingkaran $(-0,1, 0,1)$ pada bidang Z) (Tabel 5).

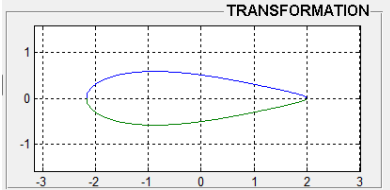
Bentuk airfoil memiliki karakteristik penamaan tersendiri yang menurut NACA dapat digolongkan dalam seri 4. Berikut (Gambar 2) airfoil hasil program Matlab GUI untuk transformasi $R = 1,1$ dan pusat lingkaran $(-0,1, 0,1)$. Hasil analisa standar NACA seri 4 untuk airfoil pada Gambar 2, dapat dikategorikan sebagai berikut (Tabel 6.)

Tabel 1. hasil transformasi dengan variasi jari-jari lingkaran

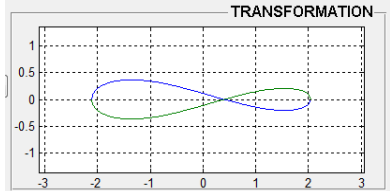
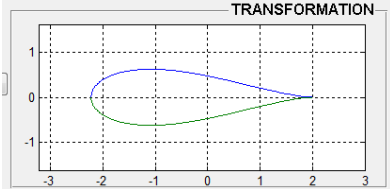
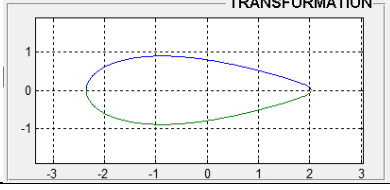
No	Parameter $s_x = 0, s_y = 0$	Hasil GUI
1	$R = 1$	
2	$R = 1,1$	
3	$R = 1,2$	

Tabel 2. hasil transformasi dengan variasi pergeseran titik pusat arah sumbu x negatif $(-s_x, 0)$ jari-jari konstan $R = 1,3$.

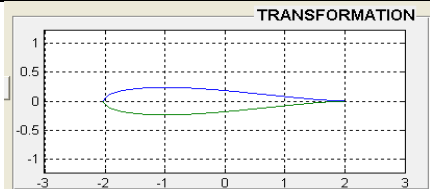
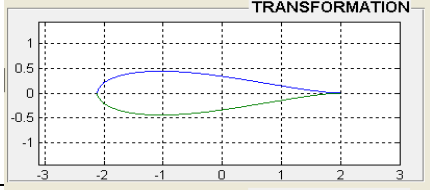
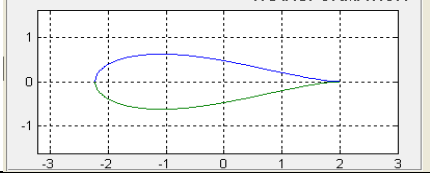
No	Parameter $R=1,3$; $s_y=0$	Hasil GUI
1	$s_x = 0$	
2	$s_x = -0,1$	

3	$sx = -0,2$	
---	-------------	--

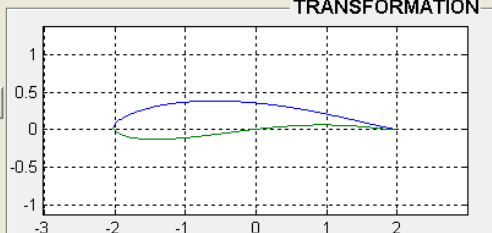
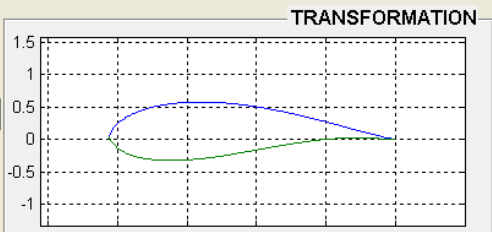
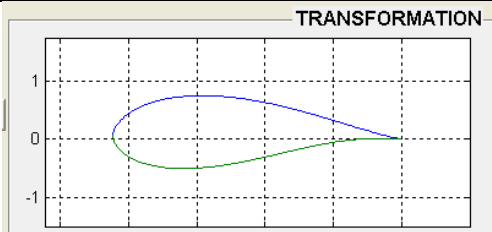
Tabel 3. Hasil transformasi pregeseran titik pusat lingkaran (0,3 , 0) dengan variasi jari-jari.

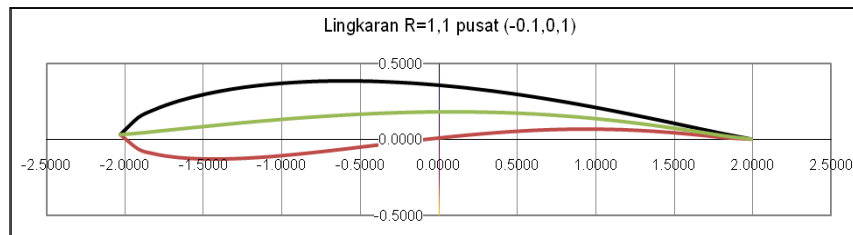
No	Parameter $sx=-0,3$; $sy=0$	Hasil GUI
1	$R = 1,1$	
2	$R = 1,3$	
3	$R = 1,5$	

Tabel 4. Penentuan standar seri NACA pada airfoil simetri.

persamaan lingkaran	Desain Airfoil	Components of the airfoil.	NACA A
$R = 1,1$ $sx = -0,1$ $sy = 0$ $(x+0,1)^2+y^2=(1,1)^2$		chord = 4.033 max = 0.237 c = 1.063 thickness % = 6%	0006
$R = 1,2$ $sx = -0,2$ $sy = 0$ $(x+0,2)^2+y^2=(1,2)^2$		chord = 4.114 max = 0.443 c = 1.0727 thickness % = 11%	0011
$R = 1,3$ $sx = -0,3$ $sy = 0$ $(x+0,3)^2+y^2=(1,3)^2$		chord = 4.225 max = 0.625 c = 1.116 thickness % = 15%	0015

Tabel 5. Desain airfoil dari matlab GUI dengan variasi jari-jari lingkaran

persamaan lingkaran	figure Airfoil
$R = 1.1$ $sx = -0.1$ $sy = 0.1$ $(x+0.1)^2+(y-0.1)^2=(1.1)^2$	
$R = 1.2$ $sx = -0.1$ $sy = 0,1$ $(x+0.1)^2+(y-0.1)^2=(1.2)^2$	
$R = 1.3$ $sx = -0.1$ $sy = 0.1$ $(x+0.1)^2+(y-0.1)^2=(1.3)^2$	



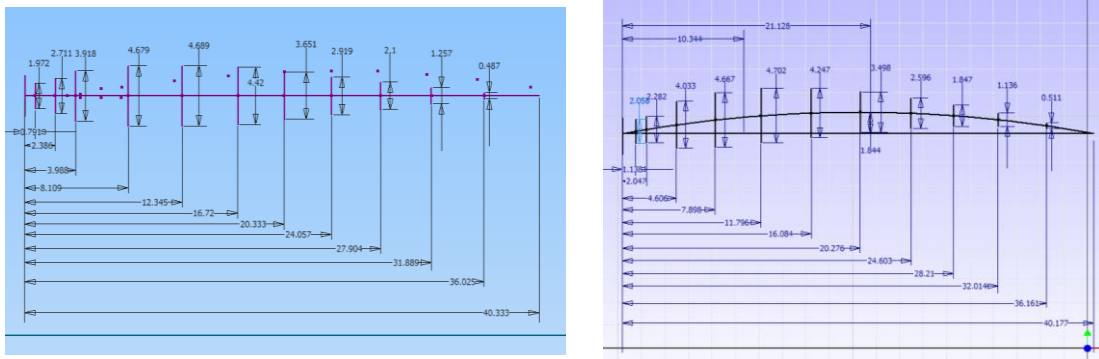
Gambar 2. Airfoil dari hasil program GUI untuk transformasi R = 1,1 dan pusat lingkaran (-0,1 , 0,1)

Tabel 6. Karakterisasi penamaan seri menurut standar NACA seri 4

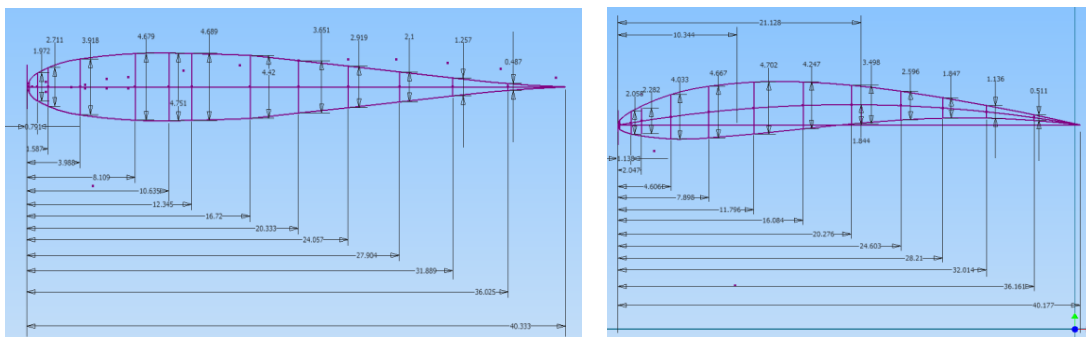
Nama	ukuran	% C	notasi
chord	4.0177	100 %	
thickness max	0.4762	12%	12
chamber maksimum	0.2381	6%	6
letak chamber mak.		26%	3
SERI NACA		6312	

Untuk mendesain bilah kincir dengan penampang airfoil, dapat digunakan program bantu komputer (CAD/ *Computer Aided Design*), salah satunya adalah CAD. Berikut rancangan untuk airfoil NACA 0006 dan 6312 dengan menggunakan CAD (Gambar 3). Urutan rancangan didasarkan pada Gambar 5.11, antara lain: 1). Menentukan panjang chord, b).Menentukan chamber mean-line

(mean chamber line). 3).Menentukan absis % chord dari titik leading edge (0%) hingga trailing edge (100%). 4). Menentukan upper surface (top chamber line) dan lower surface (down chamber line). 5).Menentukan Chamber, 6).Menentukan maximum thickness. Gambar 2 menunjukkan penentuan thickness dan absis % Chord.



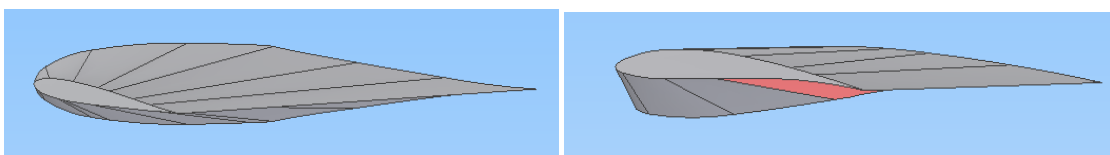
(a). NACA 0006 (b) NACA 6312
Gambar 3. Penentuan koordinat dasar pada airfoil.



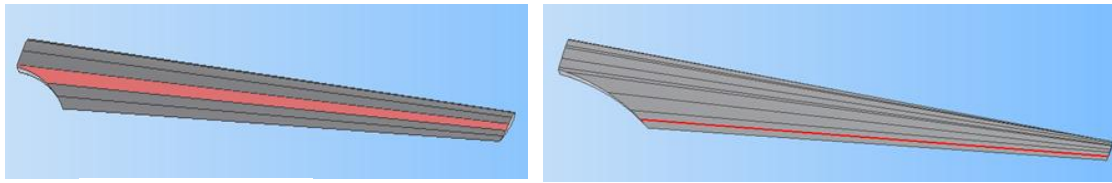
(a). NACA 0006 (b) NACA 6312
Gambar 4. Desain airfoil dengan bantuan CAD

Bentuk airfoil pada Gambar 4 adalah tampilan 2 dimensi (2D), dengan kemampuan software CAD tampilan tersebut dijadikan dasar untuk menjadi tampilan 3D. Adapun ketentuan untuk membuat bilah kincir angin adalah dengan menentukan terlebih dahulu, antara lain: 1). Standar NACA menggunakan ukuran %, sehingga untuk ukuran besar atau kecil hanya dikalikan faktor persentasenya. 2). Lebar bawah bilah (*root blade*). 3). Lebar bilah atas (*tip blade*). 4). Sudut puntir (*helix angle blade*) sudut antara root blade dan tip blade biasanya besarnya 5 – 10, harus lebih kecil dari sudut serang (*angle attack*). 5). Panjang bilah (*length blade*). 6). Sudut puntir (*helix angle blade*) dapat terlihat jelas lihat dari tampak atas (pada tip blade) (Gambar 5) sudut tersebut merupakan sudut antara *chord root* dan *chord tip*.

Pada Gambar 6 menunjukkan bentuk bilah kincir angin hasil rancangan dengan spesifikasi, panjang bilah 2,5 m , panjang chord root 40 cm, panjang chord tip 10 cm, sudut helix 8°. Panjang bilah menentukan berapa besar daya kincir angin yang dihasilkan. Berdasarkan persamaan energi kinetik angin, besar energi tersebut yang dapat dirubah menjadi energi mekanik adalah dalam bentuk daya yaitu $P = 8/27 \rho A V^3$. Sehingga apabila panjang bilah 2,5 m, maka diameter rotor kincir adalah 5 m maka luas angin yang dapat diubah adalah $A = 19,625 \text{ m}^2$, jika kecepatan angin rata-rata 6 m/detik dan massa jenis udaran 1 kg/m^3 , maka daya yang dapat dihasilkan adalah 1.256 watt.



(a) NACA 0006 (b) NACA 6312
Gambar 5. Sudut puntir (helix angle) antara chord root dan chord tip blade



(a). NACA 0006

(b). NACA 6312

Gambar 6. Bentuk bilah kincir angin

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan pada bab sebelumnya dapat diambil beberapa kesimpulan.

Pada dasarnya pengembangan bidang aplikasi teknik, dikembangkan dari suatu perhitungan dan persamaan matematik, dalam hal ini pemetaan bilangan kompleks dapat menghasilkan suatu transformasi yang banyak digunakan dibidang aerodinamik khususnya bentuk airfoil yang dapat digunakan untuk merancang bilah kincir angin.

Proses penyelesaian persamaan matematik dan perhitungan dapat dilakukan secara manual, akan tetapi jika harus menyelesaikan data dalam jumlah yang banyak, menjadikan rumit dan memakan waktu. Dengan bantuan program Matlab penyelesaian persamaan matematik menjadi lebih cepat dan akurat, dalam hal ini proses pemetaan bilangan kompleks untuk membuat desain airfoil dapat dilakukan cepat dan akurat.

Dengan bantuan software Matlab dan CAD dapat menyelesaikan permasalahan di bidang teknik khususnya untuk mendapatkan desain airfoil untuk bilah kincir angin, dengan desain yang dapat dipertanggung jawabkan.

DAFTAR PUSTAKA

Dauhoo M.Z. 2003 .“The Role of the Kutta-Solution of Euler Equations for a Symmetrical Airfoil.” Integrating CFD and Experiments University of Mauritius

- Eichstaedt , Johannes C. 2007,“ Conformal mapping in context: the Joukowski transformation in Aerodynamics “ a1307 E 60TH ST, Chicago, IL 60637
- Gutierrez , David. 2003, “Joukowski Transformation Program “ <http://eraucomputationalmath.com/docs/joukowski.doc>
- Kreyszig , Erwin, 2006 “ Advanced Engineering Mathematics” 9th editon John Wiley & Son.
- Kundu, P.K. and Cohen I.M., 2004. Fluid Mechanics, 3rd Ed., Academic Press.
- Mathwork,. 2011. <http://www.mathworks.com> 1994-2011 The MathWorks, Inc. Dikutip tanggal 1 Januari 2014.
- Solomentsev, E.D. (2001), "Complex number", in Hazewinkel, Michiel, *Encyclopaedia of Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, ISBN 978-1556080104
- Spiegel, Murray R dan Koko martono, 1983,. “ Matematika Lanjutan untuk Para Insinyur dan Ilmuwan “ Penerbit Erlangga Jakarta.
- www.cfd4aircraft.com/int_conf/IC1/presentation/day1/dauhoo.pdf . Dikutip tanggal 20 Desember 2013.

