JURNAL TEKNOLOGI TECHNOSCIENTIA ISSN: 1979-8415
Vol. 5 No. 1 Agustus 2012

PENERAPAN PENEMPATAN NILAI EIGEN INFINITE SISTEM SINGULAR PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN POLINOMIAL MATRIKS BERBENTUK [Es – A] X + B Y = U(s)

Kris Suryowati[1], Yudi Setyawan[2]

[1,2]Jurusan Matematika, Institut Sains dan Teknologi AKPRIND Yogyakarta

Masuk: 29 Mei 2012, revisi masuk: 28 Juni 2012, diterima: 5 Juli 2012

ASBTRACT

Problem of solvability of polynomial equations and matrix eigenvalue relation to the placement of an infinite state-feedback is important to learn because it deals with the properties of dynamic and static systems. In this case discussed the problem with putting the infinite eigenvalue decomposition of the standard, then the results are applied to problem solving matrix polynomial equations. On eigenvalue placement or placement of the poles, the problem is determining the state feedback matrix K such that det [Es - A + BK] = $\alpha \neq 0$, in α and s with each other independent. Singular linear system that has an infinite eigenvalue will be formed in such infinite eigenvalues are placed so that the system has no eigenvalues of infinite state by providing appropriate feedback. Problems on infinite eigenvalue assignment can be attributed to the determination of polynomial equation solution in the form of matrix [Es - A] X + BY = U(s) for a matrix U(s) with detU(s) = α, so that necessary and sufficient conditions of existence of solutions (X,Y) and form a solution.

Keywords: *singular linear systems, infinite eigenvalue assignment, polynomial matrix equation*

INTISARI

Masalah *solvability* dari persamaan matriks polinomial dan kaitannya dengan penempatan nilai eigen infinite state-feedback adalah penting dipelajari karena berhubungan dengan sifat-sifat dinamik dan statik sistemnya. Dalam hal ini dibahas masalah penempatan nilai eigen infinite atas dekomposisi standar, kemudian hasilnya diaplikasikan pada penyelesaian masalah persamaan polinomial matriks. Pada penempatan nilai eigen atau penempatan kutub, yang menjadi permasalahannya yaitu pada penentuan state feedback matriks K sedemikian sehingga det[Es – A + BK] = $\alpha \neq 0$ dengan α dan s saling independent. Sistem linear singular yang mempunyai nilai eigen infinite akan dibentuk sedemikian nilai-nilai eigen infinite tersebut ditempatkan sehingga sistem tidak mempunyai nilai-nilai eigen infinite yaitu dengan memberikan state feedback yang sesuai. Permasalahan pada penempatan nilai eigen infinite dapat dikaitkan pada penentuan solusi persamaan polinomial matriks yang berbentuk [Es–A] X + B Y = U(s) untuk suatu matriks U(s) dengan detU(s) = α, sehingga akan dibahas syarat perlu dan cukup keberadaan solusi (X,Y) serta bentuk solusinya.

Kata Kunci: sistem linier singular, penempatan nilai eigen infinite, persamaan polinomial matriks

[1] krisnaroz@gmail.com
[2] yudista2003@yahoo.com

PENDAHULUAN

Penempatan nilai *eigen* sangat penting dalam efektivitas sifat-sifat dinamik dan sifat-sifat statik sistem linear singular. Penempatan nilai eigen infinite diharapkan dapat merubah sifat sistemnya melalui input kontrol sehingga sistem loop tertutupnya memiliki sifat-sifat yang diharapkan. Pada sistem linear singular tidak hanya memiliki nilai eigen finite tapi juga nilai eigen infinite yang mempengaruhi sifat-sifat sistem. Pada 2003, *Kaczorek* telah mempelajari masalah penempatan nilai eigen infinite atas dekomposisi singular. Dalam artikel ini akan dibahas masalah penempatan nilai eigen infinite atas dekomposisi standar. Selanjutnya diaplikasikan pada permasalahan penyelesaian persamaan polinomial matriks.

Sistem linear singular yang dimaksud pada penelitian ini adalah sistem linear singular *time invariant* atau sistem linear singular yang tidak dipengaruhi oleh perubahan waktu, yang mempunyai bentuk umum

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) \qquad (1)$$

dengan $x(t)\in R^n$ vektor keadaan, $u(t)\in R^m$ vektor masukan (vektor kendali), $y(t)\in R^r$ vektor output, dan $A,E\in R^{nxn}$, $B\in R^{nxm}$, $C\in R^{rxn}$ merupakan matriks-matriks konstan. Sistem (1) diasumsikan regular untuk menjamin keberadaan dan ketunggalan solusi (Dai,1988).

State-feedback control sangat penting dalam rancangan sistem. Metode *state feedback control* atas kondisi tertentu, diperlukan pada struktur penempatan nilai eigen sedemikian sehingga sistem loop tertutup mempunyai sifat-sifat yang diharapkan. Banyak kenyataan menunjukkan bahwa untuk sistem deterministik metode keadaan feedback adalah tepat atau baik sekali dan praktis untuk menyelesaikan kasus-kasus.

Pada sistem linear normal, berdasarkan pada asumsi bahwa sistem terkontrol maka terdapat matriks K pada state-feedback sedemikian sehingga

$$\det[I_n s - A + BK] = p(s),$$

dengan $p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0$ merupakan polinomial sebarang berderajat n yang sesuai, dan dalam hal ini matriks K dapat dimodifikasi. Jika mengganti matriks K maka hanya dapat memodifikasi sembarang koefisien a_0. a_1, a_2, ..., a_{n-1}, tetapi tidak dapat merubah degree n pada polinomial yang ditentukan oleh matriks $I_n s$. (Olsder, 1994 dan Chen, C.T., 1984).

Dalam sistem linear singular, degree pada polinomial karakteristik sistem loop tertutup dapat diubah dengan pemilihan matriks K yang sesuai pada state feedback.

Pada penempatan nilai eigen atau penempatan kutub untuk sistem linear singular, yang menjadi permasalahan dalam hal ini adalah penentuan state-feedback matriks K sedemikian hingga

$$\det[Es–A+BK] = \alpha \neq 0$$

dengan α dan s saling independent atau saling bebas. Dalam hal ini nilai eigen infinite akan dibentuk sedemikian sehingga nilai-nilai eigen infinite ditempatkan agar sistem tidak mempunyai nilai-nilai eigen infinite dengan memberikan state-feedback yang sesuai.

Diberikan state-feedback

$$u(t) = v(t) – Kx(t), \qquad (2)$$

dengan $v\in R^m$ vektor input baru; $K\in R^{mxn}$ matriks yang dicari.

Kemudian dari (1) dan (2) diperoleh

$$E\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bv(t) \quad (3)$$

Ambil $R^{nxm}[s]$ himpunan polinomial matriks berukuran nxm dalam s dengan koefisien real dan $U(s)\in R^{nxn}[s]$ dengan $\det U(s) = \alpha$.

Selanjutnya dibentuk polinomial matriks sebagai berikut

$$[Es – A]X + BY = U(s) \qquad (4)$$

Yang menjadi permasalahan adalah:

Cara menentukan formulasi matriks K sehingga $\det[Es – A + BK] = \alpha \neq 0$

Syarat perlu dan cukup keberadaan solusi pada persamaan (4) dan menentukan solusinya.

METODA

Beberapa sifat matriks yang penting (Cullen,1966) adalah sebagai berikut: Setiap matriks A berukuran nxn ekuivalen dengan suatu matriks $\mathrm{diag}[I_r , 0]$ yaitu terdapat matriks nonsingular P dan Q sehingga:

$$QAP = \mathrm{diag}[I_r , 0] \quad \text{dan} \quad r = \mathrm{rank}A.$$

Untuk matriks $A,B\in R^{nxn}$ maka matriks A similar dengan B (ditulis $A \approx B$) jika terdapat matriks nonsingular $P\in R^{nxn}$ yang memenuhi $B = P A P^{-1}$. Similaritas merupakan kejadian khusus dari relasi ekuivalensi, jadi jika dua atau lebih untuk matriks-matriks yang similar mempunyai rank sama.

Sistem linear normal berbentuk $\dot{x}$ = Ax + Bu terkontrol jika terdapat suatu state-feedback berupa matriks K sehinga memenuhi det[I_ns – A + BK] = p(s) dengan p(s) = $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$ sebarang polinomial dengan degree n sesuai degree sistem. Dengan mengganti K maka dapat dimodifikasi koefisien a_0. a_1, a_2, ..., a_{n-1}, tetapi tidak dapat merubah degree n pada polinomial yang ditentukan oleh matriks I_ns (Olsder, 1994).

Pada sistem linear singular time invariant diasumsikan bahwa sistemnya regular, untuk menjamin keberadaan dan ketunggalan solusi sistem sehingga sistem dapat dibawa kebentuk dekomposisi standar sistem (Dai, 1988 dan Suryowati, 2002).

Pada makalah berjudul *Feedback Design for Regularizing Descriptor Systems* (Bunse et al, 1999) dibahas tentang rancangan feedback sistem linear singular untuk bentuk sistem Dekomposisinya dengan menggunakan dekomposisi singular sistem.

Definisi 1. (Gantmacher, 1960), m*atriks pencil (E,A) regular jika terdapat konstanta skalar* $s \in C$ *sedemikian sehingga polinomial* $|sE - A| \neq 0$.

Lemma 2, m*atriks pencil (sE-A) regular jika dan hanya jika terdapat matrix Q dan P nonsingular sehingga QEP =diag (*I_{n_1} *, N) dan QAP = diag(* A_1 *,* I_{n_2} *) , dengan*
$n_1 + n_2 = n$, $A_1 \in R^{n_1 x n_1}$, $N \in R^{n_2 x n_2}$ *nilpoten.*

Melalui transformasi x = P$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ dan dengan menerapkan Lemma 2 sehingga diperoleh bentuk standar dekomposisi sistem linear singular, sebagai berikut:

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u(t),$$
$$y_1(t) = C_1 x_1(t) \qquad (5.a)$$
$$N\dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_1 u(t),$$
$$y_2(t) = C_2 x_2(t) \qquad (5.b)$$

dengan CP = [C_1 , C_2] ; QB = $\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$;

$B_1 \in R^{n_1 xn}$; $B_2 \in R^{n_2 xn}$; $x_1 \in R^{n_1}$; $x_2 \in R^{n_2}$.

Persamaan (5.a) merupakan susbsistem pertama yang sering disebut subsistem normal atau subsistem pertama, sedangkan persamaan (5.b) merupakan subsistem kedua dan sering disebut subsistem linear singular khusus dengan N matriks nilpoten berindeks k. (Dai (1988) dan Suryowati (2002)).

Definisi 3, sistem Pada (1) Disebut Terkontrol Jika Untuk Setiap T_1>0, $X_1(0)$, W$\in R^n$ Terdapat Masukan Kendali U(T)$\in R^m$ Yang Memenuhi

$$x(t_1) = \begin{bmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \end{bmatrix} = w$$

Selanjutnya diberikan matriks $\Re_1 = [B_1, A_1 B_1, A_1^2 B_1, \ldots, A_1^{n_1-1} B_1]$ dan $\Re_2 = [B_2, NB_2, N^2 B_2, \ldots, N^{h-1} B_2]$ yang didefinisikan sebagai matriks *controllability* untuk subsistem (5.a) dan subsistem (5.b).

Didefinisikan Im$\Re$ = Im$\Re_1 \oplus$ Im$\Re_2$ dengan Im$\Re$ subruang *controllability* sistem, Im$\Re_s$ subruang *controllability* subsistem pertama dan Im$\Re_f$ subruang *controllability* subsistem kedua. (Cobb, 1984)

Teorema berikut memberikan sifat-sifat *controllability* system linear singular diambil dari Dai (1988).

Teorema 4, s*ubsistem pertama pada persamaan (5.a) controllable jika dan hanya jika rank[sE-A, B] = n, untuk setiap* $s \in \mathbb{C}$ *dan s berhingga.*

Subsistem kedua pada persamaan (5.b) controllable jika dan hanya jika rank[E , B] = n

Sistem linear singular controllable jika dan hanya jika kedua subsistem pada persamaan (5.a) dan persamaan (5.b) controllable.

Misal pada sistem linear singular diberikan state-feedback :

u(t) = v(t) – Kx(t)

dengan v$\in R^m$ vektor input baru dan K$\in R^{mxn}$ matriks yang ditentukan, dengan demikian dari state-feedback tersebut, diperoleh sistem loop tertutup :

$$E\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bv(t) \quad (6)$$

Sehingga matriks K sangat mempengaruhi sistem loop tertutup tersebut, yaitu pada penempatan nilai eigen infinite sedemikian hingga sesuai dengan yang diharapkan pada sistem linear singular.

Misal R^{nxm}[s] himpunan polinomial matriks berukuran nxm dalam s dengan koefisien bilangan real dan U(s)$\in R^{nxn}$[s] dengan det U(s) = α dan

U(s) = [Es – A + BK]

Sehingga det [Es – A + BK] = α, dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\det \left\{ [Es - A, B] \begin{bmatrix} I_n \\ K \end{bmatrix} \right\} = \det U(s)$$

$$\det([Es - A].I_n + BK) = \det U(s)$$

atau

$$[Es - A].X + BY = U(s) \qquad (7)$$

dengan $X = I_n$, $Y = K$.

Persamaan (7) merupakan bentuk persamaan polinomial matriks, sehingga jika diberikan matriks E, A, B dan U(s) dengan detU(s) = α, maka solusi X, Y pada persamaan tersebut dapat ditentukan.

Lemma 5 (Dai, 1988), T*erdapat matriks K sedemikian sehingga sistem loop tertutup (6), tidak punya kutub-kutub infinite jika dan hanya jika deg(*$|sE - (A-BK)|$*) = rank E*

Teorema 6 (Dai, 1988), Sistem linear singular persamaan (1), sistem loop tertutup persamaan (6) tidak punya kutub-kutub infinite jika dan hanya jika sistem tersebut impulse controlability yakni dapat ditiadakan term impulsnya dengan memberikan state proportional murni kontrol feedback.

PEMBAHASAN

Penempatan Nilai Eigen Infinite pada Sistem Linear Singular, Menurut Dai (1989), Kaliath (1980), Wonham (1979), Kaczorek (1993) dan Kučera (1981), jika sistem linear singular bersifat terkontrol maka terdapat suatu state-feedback verbentuk matriks K sehingga det(Es–A+BK) = p(s) dengan

$$p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

sebarang polinomial dengan degree n sesuai degree sistem. Dengan mengubah bentuk matriks K maka polinomial p(s) dapat dimodifikasi melalui perubahan pada koefisien a_0. a_1,..., $a_{n-1,}$ tetapi tidak mengubah degree polinomialnya yang ditentukan oleh matriks I_ns. Pada sistem linier singular juga dapat diubah derajat polinomial karakteristik loop tertutup melalui pemilihan matriks state-feedback K yang sesuai. Lebih jauh akan dibahas penentuan state-feedback matriks K sedemikian sehingga det(Es – A + BK) = $\alpha \neq 0$ dengan α dan s saling independen.

Penempatan nilai eigen infinite sistem linear singular identik dengan penempatan nilai kutub-kutub infinite sistem, yang penting dalam efektivitas sifat-sifat dinamik dan sifat-sifat statik pada sistem linear singular waktu invariant. Penempatan nilai eigen infinite diharapkan dapat merubah sifat sistemnya melalui input kontrol sehingga sistem loop tertutupnya memiliki sifat-sifat yang diharapkan.

Diberikan sistem (1) terkontrol atau terkendali artinya kedua subsistem terkendali jika dan hanya jika rank[Es– A , B] = n, untuk semua finite $s \in \mathbb{C}$ dan rank[E, B]= n.

Berikut lemma yang mendasar untuk menentukan matriks K sedemikian sehingga det[Es – A + BK] = α

Lemma 7, J*ika sistem linear singular (1) reguler, maka terdapat matriks ortogonal U dan V sedemikian sehingga*

$$U[Es - A]V = \begin{bmatrix} E_1 s - A_1 & * \\ 0 & E_0 s - A_0 \end{bmatrix},$$

$$UB = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

dengan $E_1, A_1 \in R^{n_1 x n_1}$, $E_0, A_0 \in R^{n_0 x n_0}$, $B_1 \in R^{n_1 x m}$*, subsistem (*E_1, A_1, B_1*) terkendali, pasangan matriks (*E_0, A_0*) regular,* E_1 *matriks segitiga atas. Dan matriks-matriks* E_1, A_1 *dan* B_1 *membentuk sebagai berikut:*

$E_1 s - A_1$ =

$$\begin{bmatrix} E_{11}s - A_{11} & E_{12}s - A_{12} & \cdots & E_{1,k-1}s - A_{1,k-1} & E_{1k}s - A_{1k} \\ -A_{21} & E_{22}s - A_{22} & \cdots & E_{2,k-1}s - A_{2,k-1} & E_{2k}s - A_{2k} \\ 0 & -A_{32} & \cdots & E_{3,k-1}s - A_{3,k-1} & E_{3k}s - A_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -A_{k,k-1} & E_{kk}s - A_{kk} \end{bmatrix}$$

$$, B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

dengan $E_{ij}, A_{ij} \in R^{\bar{n}_i x \bar{n}_j}$*, i,j = 1, 2, 3, ..., k*

dan $B_{11} \in R^{\bar{n}_i x m}$, $\sum_{i=1}^{n} \bar{n}_i = n_1$

untuk B_{11} , A_{21} , ... , $A_{k,k-1}$ *merupakan matriks rank baris penuh dan* $\bar{E}_{22}, \cdots, \bar{E}_{kk}$ *matriks-matriks nonsingular.*

Teorema 8, d*iberikan sistem linear singular (1) reguler dan matriks E,A,B dapat ditransformasikan ke bentuk (8) dan (9). Maka terdapat suatu matriks K yang memenuhi*

$$\det[Es - A + BK] = \alpha$$

jika dan hanya jika

Subsistem (E_1, A_1, B_1) singular, artinya det $E_1 = 0$ (10.a)

Jika $n_0>0$ maka degre polinomial det[$E_0s–A_0$]=0 atau

deg{det[$E_0s–A_0$]}=0 , $n_0>0$ (10.b)

Bukti : Syarat perlu ($\Rightarrow$),dari persamaan (8) dan persamaan (9) diperoleh

det[Es – A +BK]

$= \det U^{-1} \det V^{-1} \times \det[E_1 s – A_1 + B_1 \bar{K}]) (\det[E_0 s – A_0]) = \alpha$ (11)

dengan $\bar{K}$ = KV $\in R^{mxn}$ dan

$\det[E_0s – A_0] = 1$ jika $n_0 = 0$.

Dari (8) yang mengikuti kondisi (11) berlaku hanya jika kondisi (10.a) dan (10.b) terpenuhi.

Syarat cukup ($\Leftarrow$), untuk kasus input tunggal (m = 1).

$$E_1 = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n_1} \\ 0 & e_{22} & \cdots & e_{2n_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_{n_1n_1} \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n_1-1} & a_{1n_1} \\ a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{2n_1-1} & a_{2n_1} \\ 0 & a_{32} & \cdots & a_{3n_1-1} & a_{3n_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n_1n_1-1} & a_{n_1n_1} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

Dengan $e_{11} \neq 0$, $a_{i,i-1} \neq 0$ untuk i = 2, 3, … , n_1 dan $b_{11} \neq 0$. Karena kondisi dari pernyataan diketahui detE_1 = 0 maka berakibat $e_{11} = 0$. Perkalian matriks [E_1s – A_1 , B_1] dengan suatu matriks ortogonal pada operasi baris P_1, memungkinkan dapat membuat entri e_{12}, e_{13}, … , e_{1n_1} pada E_1 nol, karena $e_{ii} \neq 0$, yaitu sebagai berikut

$$\bar{E}_1 = P_1 E_1 = \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_{22} & \cdots & e_{2n_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_{n_1n_1} \end{bmatrix} \qquad (13)$$

reduksi pada A_1 dengan matriks P_1 diperoleh sebagai berikut

$$\bar{A}_1 = P_1 A_1 = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1n_1-1} & \bar{a}_{1n_1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n_1-1} & a_{2n_1} \\ 0 & a_{32} & \cdots & a_{3n_1-1} & a_{3n_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n_1n_1-1} & a_{n_1n_1} \end{bmatrix};$$

$$\bar{b}_1 = P_1 b_1 = b_1 \qquad (14)$$

Ambil

$$\bar{k}_1 = \frac{1}{b_{11}}\begin{bmatrix} -\bar{a}_{11} & -\bar{a}_{12} & \cdots & -\bar{a}_{1n_1-1} & 1-\bar{a}_{1n_1} \end{bmatrix} \qquad (15)$$

Dengan menggunakan (11), (14), dan(15) diperoleh $\det\left[\bar{E}_1 s - \bar{A}_1 + \bar{b}_1 \bar{k}_1\right]$ =

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_{21} & e_{22}s - a_{22} & \cdots & e_{2n_1-1}s - a_{2n_1-1} & e_{2n_1}s - a_{2n_1} \\ 0 & -a_{32} & \cdots & e_{3n_1-1} - a_{3n_1-1} & e_{3n_1}s - a_{3n_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{n_1n_1-1} & e_{n_1n_1}s - a_{n_1n_1} \end{vmatrix} a_{21}$$

$a_{31} \ldots a_{n_1,n_1-1} = \bar{\alpha}$

dengan

$$\bar{\alpha} = \alpha \det U \det V \det P_1 \det[E_0 s - A_0]^{-1}$$

Selanjutnya ambil

$$\bar{K} = \bar{B}_1^{-1}\left\{\left[\bar{A}_{11}, \bar{A}_{12}, \cdots, \bar{A}_{1k}\right] + \hat{E}\right\}. \qquad (16)$$

Pilih matriks $\hat{E} \in R^{mxn}$ dalam (16) sehingga

$$\hat{E} = \bar{E}_1 s - \bar{A}_1 + \bar{B}_1 \bar{K} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{l+1}h \\ \bar{a}_{21} & * & \cdots & * & * \\ 0 & \bar{a}_{32} & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_{1,l-1} & * \end{bmatrix} \qquad (17)$$

dengan $h = \dfrac{\alpha(-1)^{l+1}}{\bar{a}_{21}\bar{a}_{32}\cdots\bar{a}_{ll-1}c}$ dan

c = det U^{-1}det V^{-1}det $P_1^{-1} \det[E_0 s - A_0]$.

Dengan menggunakan (11), (16) dan (17) maka diperoleh

det[Es – A + BK] = c $\det\left[\bar{E}_1 s - \bar{A}_1 + \bar{B}_1 \bar{K}\right]$

$= \alpha$ (18)

Contoh 1.

Diberikan matriks-matriks pada sistem (1) sebagai berikut $E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Tentukan matriks K sedemikian sehingga det[Es – A + BK] = α dengan α = 1.

Penyelesaian:Ditunjukkan bahwa sistemnya regular yaitu memenuhi:

Det(sE-A) = $\begin{vmatrix} -1 & 2s+1 & s & -1 \\ 0 & s-1 & -s-2 & 2s \\ 1 & 0 & s-1 & 1-s \\ 0 & 0 & -2 & s-1 \end{vmatrix}$

$=(1-2s)(s-1)^2 \neq 0$

Matriks E, A dan B di atas dapat disajikan pada persamaan (8) dan (9) dengan E_1 = E, A_1 = A, B_1=B, n_1=n=4, $\bar{n}_1$=2, $\bar{n}_2 = \bar{n}_3$=1, m = 2 dan

$E_{11}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_{12}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $E_{13}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, E_{22}=[1], E_{23}=[-1] , E_{33}=[1]

$A_{11}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{12}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A_{13}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

A_{21}=[-10], A_{22}=[1], A_{23}=[-1], A_{32}=[2], A_{33}=[1], $B_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Mengguanakan operasi elementer baris dan kolom maka diperoleh

$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan

$\left[\bar{E}_1 s - \bar{A}_1, \bar{B}_1\right]$=$P_1$[Es – A, B]

$=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ x

$\begin{bmatrix} -1 & 2s+1 & s & -1 & 1 & 0 \\ 0 & s-1 & -s-2 & 2s & 0 & 1 \\ 1 & 0 & s-1 & 1-s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & s-1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & -5 & 1 & -2 \\ 1 & s-1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & s-1 & 1-s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & s-1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Dengan perhitungan, maka dalam kasus ini diperoleh

$\hat{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}5 \end{bmatrix}$

Dari $\bar{A} = P_1 A$, diperoleh

$\left[\bar{A}_{11} \quad \bar{A}_{12} \quad \bar{A}_{13}\right] = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Dari $\bar{B} = P_1 B$, diperoleh

$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan menggunakan persamaan (16) diperoleh

K = $\bar{K} = \bar{B}_1^{-1}\left\{\left[\bar{A}_{11} \quad \bar{A}_{12} \quad \bar{A}_{13}\right] + \hat{E}\right\}$

K = $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2{,}5 \end{bmatrix}$

Selanjutnya dicek bahwa :

|sE-A+BK| = $\begin{vmatrix} 1 & 2s-1 & s-3 & -1 \\ -1 & s & -s & 2s-2{,}5 \\ 1 & 0 & s-1 & -s+1 \\ 0 & 0 & -2 & s-1 \end{vmatrix}$ =1

Menentukan Solusi Persamaan, [Es– A]X + BY = U(s), diberikan persama-an polinomial matriks berbentuk [Es– A]X + BY = U(s) untuk matriks U(s) dan detU(s) = α. Selanjutnya akan ditentukan solusi polynomial tersebut, jika matriks-matriks E, A dan B diketahui yang kaitannya dengan system linear singular.

Teorema berikut mendasari ke-beradaan solusi persamaan polinomial matriks, yaitu menyangkut syarat perlu dan cukup keberadaan solusi.

Teorema 9, p*ersamaan polinomial matriks berbentuk [Es – A]X + BY = U(s) u*ntuk matriks U(s) dan detU(s) = α *mempunyai solusi hanya jika rank[Es – A, B] = n untuk* $s \in \mathbb{C}$ *, dengan s berhingga dan D=Es–U(s) matriks real yang in-depen-den terhadap s.*

Bukti: Persamaan

Es – A + BK = $\left[Es - A, B\right]\begin{bmatrix} I_n \\ K \end{bmatrix}$ sehingga

det [Es – A + BK] = det $\left[Es - A, B\right]\begin{bmatrix} I_n \\ K \end{bmatrix}$

dengan menerapkan

det[Es – A + BK] = α diperoleh

det[Es – A + BK] = det $\left[Es - A, B\right]\begin{bmatrix} I_n \\ K \end{bmatrix}$ =α

sehingga rank[Es – A, B] = n. Kemudian dari persamaan [Es-A]X + BY = U(s) dan untuk X = I_n ; Y = K diperoleh

Es – U(s) = A – BK .

Jika diambil Es – U(s) = D $\in R^{nxn}$

maka Es – U(s) = A – BK = D $\in R^{nxn}$ Lebih lanjut persamaan polinomial tersebut mempunyai solusi X = I_n dan Y = K hanya jika Es – U(s) = D$\in R^{nxn}$

Matriks E, A dan B pada persamaan (4) mempunyai solusi jika memenuhi kondisi Teorema 9 ,rank[Es – A, B] = n untuk semua berhingga $s \in \mathbb{C}$ dan D = Es – U(s) matriks real yang tidak memuat s. Jika sistem persamaan linear singular dengan koefisien matriks E,A,B terkendali (*controllable*) maka dengan Lemma 7 terdapat matriks nonsingular P dan Q sedemikian sehingga

$$\tilde{E} = PEQ = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{11} & \tilde{E}_{12} & \cdots & \tilde{E}_{1k} \\ 0 & \tilde{E}_{22} & \cdots & \tilde{E}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{E}_{kk} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A} = PAQ = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \cdots & \tilde{A}_{1k-1} & \tilde{A}_{1k} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \cdots & \tilde{A}_{2,k-1} & \tilde{A}_{2k} \\ 0 & \tilde{A}_{32} & \cdots & \tilde{A}_{3,k-1} & \tilde{A}_{3k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{A}_{k,k-1} & \tilde{A}_{kk} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = PB = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (19)$$

Dengan $\tilde{B}_1 \in R^{\tilde{n}_1 xm}, \tilde{A}_{i,i-1} \in R^{\tilde{n}_i x \tilde{n}_{i-1}}$, i = 2,...,k matriks rank baris penuh dan $\tilde{E}_{ii} \in R^{\tilde{n}_i x \tilde{n}_i}$ matriks nonsingular.

Teorema 10, d*iberikan matriks E, A, B yang memenuhi asumsi rank[Es – A, B] = n dan rank [E, B] = n untuk semua berhingga $s \in \mathbb{C}$ juga memenuhi Es–U(s) = A–BK=D dengan $D \in R^{nxn}$. Dan matriks E, A ,B dapat ditransformasi dengan matriks nonsingular P, Q sedemikian memenuhi (19). Maka persamaan (4) mempunyai solusi X dan Y yang memenuhi X = I_n dan Y = K jika dan hanya jika $\tilde{D}_2 = \tilde{A}_2$*

Bukti, syarat perlu ($\Rightarrow$)
persamaan [Es – A]X + BY = U(s) mempunyai solusi X dan Y yang memenuhi X = I_n dan Y=K maka dipenuhi $\tilde{D}_2 = \tilde{A}_2$ Untuk membuktikan syarat perlunya dengan membuktikan berlakunya $\tilde{D}_2 = \tilde{A}_2$, sebgai berikut mengalikan persamaan

[Es-A] I_n + BK = U(s) dengan matriks nonsingular P dan Q diperoleh

P {[Es-A] I_n + BK} Q = PU(s)Q
P[Es-A]Q + PBKQ = PU(s)Q
PEQ s – PAQ + PB.KQ = PU(s)Q

$\tilde{E}s - \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} = \tilde{U}(s)$, dengan

$\tilde{K} = KQ$ dan $\tilde{U}(s) = PU(s)Q$ (20)

Kemudian dari

P[Es – U(s)]Q = PDQ = $\tilde{D} = \tilde{E}s - \tilde{U}(s)$

dan D matriks real maka $\tilde{D}$ juga matriks real.

Diberikan $\tilde{D} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_1 \\ \tilde{D}_2 \end{bmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_2 \end{bmatrix}$ dengan $\tilde{D}_1, \tilde{A}_1 \in R^{\tilde{n}_1 xn}, \tilde{D}_2, \tilde{A}_2 \in R^{(n-\tilde{n}_1)xn}$.

Dari (19) dan (20) diperoleh

$$\tilde{D} = \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}$$

sehingga $\begin{bmatrix} \tilde{D}_1 \\ \tilde{D}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{K}$

dengan demikian diperoleh

$\tilde{D}_1 = \tilde{A}_1 - \tilde{B}_1\tilde{K}$ dan $\tilde{D}_2 = \tilde{A}_2$ (21)

Sayarat cukup ($\Leftarrow$), Jika diasumsikan

Es – U(s) = A – BK = D$\in R^{nxn}$

dipenuhi maka D merupakan matriks real dan demikian juga $\tilde{D}$ matriks real. Matriks $\tilde{B}_1$ adalah nonsingular dan dari (20) diperoleh $\tilde{K} = \tilde{B}_1^{-1}[\tilde{A}_1 - \tilde{D}_1]$ dan

Y = K = $\tilde{K}Q^{-1} = \tilde{B}_1^{-1}[\tilde{A}_1 - \tilde{D}_1]Q^{-1}$ (22)

Contoh, Diberikan persamaan matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & s-1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & s-2 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & s-1 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & s-2 & -1 \end{bmatrix}$$

Dengan s berhingga dan α konstanta sebarang. Tentukan solusi persamaan di atas. Langkah-langkah penyelesaian sebagai berikut: merubah persamaan

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & s-1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & s-2 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & s-1 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & s-2 & -1 \end{bmatrix}$$

kebentuk persamaan

[Es – A]X + BY = U(s).

Sehingga diperoleh persamaan,

$$\left\{ s\begin{bmatrix} 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right\} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & s-1 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & s-2 & -1 \end{bmatrix}$$

Dengan matriks E, A, B dan U(s) pada persamaan

E = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, A = $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

U(s) = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & s-1 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & s-2 & -1 \end{bmatrix}$ dan det U(s) = α

Menggunakan Teorema 9, diperiksa apakah persamaan tersebut mempunyai solusi, Rank[Es – A, B] =

$$= \text{rank }[s\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}]$$

$$= \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & -1 & s & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & s-2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 3 = n ,$$

$\forall s \in \mathbb{C}$, s berhingga.

Matriks D = Es – U(s)

$$D = s\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & s-1 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & s-2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Terlihat matriks D merupakan matriks real yang bebas dari s. Dengan demikian berdasarkan Teorema 9 menunjukkan bahwa polinomial matriks tersebut mempunyai solusi.

Menentukan solusi menggunakan Teorema 10, matriks-matriks nonsingular P,Q$\in R^{3x3}$ menggunakan operasi baris elementer dan operasi kolom elementer, untuk membentuk matriks yang ekuivalen dengan matriks E yaitu matriks $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

dan matriks P juga Q berbentuk sebagai berikut

P = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan Q = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

sehingga $\tilde{E} = PEQ$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\tilde{E} = PEQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\tilde{A} = PAQ =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = PB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

$\tilde{D}$ = PDQ

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_1 \\ \tilde{D}_2 \end{bmatrix}$$

Dari bentuk transformasi tersebut terlihat memenuhi Teorema 10, yaitu

$$\tilde{D}_2 = \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka persamaan [Es – A]X + BY = U(s) mempunyai solusi X dan Y yang memenuhi X = I_n dan Y = K

Selanjutnya menentukan matriks K dengan menggunakan rumus pada persamaan (22)

K = $\tilde{K}Q^{-1} = \tilde{B}_1^{-1}[\tilde{A}_1 - \tilde{D}_1]Q^{-1}$

$$= 1\,\{[\,1\ -1\ \ 2] - [\,0\ \ 0\ \ \ \alpha\ ]\,\}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = [\,1\ \ -1\ \ \ 2-\alpha]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

K = [1 , 2 - α , -1]

Jadi solusi persamaan di atas adalah

X = I_3 dan Y = K = [1 , 2 - α , -1] .

KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa: jika diberikan sistem linier singular (1) dan state-feedback u(t) = v(t) - Kx(t) dengan v(t) vektor input baru, maka sistem loop tertutup menjadi E $\dot{x}$(t) = (A – BK)x(t) + Bv(t). Jika diberikan matriks E, A dan B untuk sistem tersebut dan skalar $\alpha \neq 0$ yang tak bergantung pada s, dapat ditentukan matriks K sehingga det(Es-A+BK) = α, dengan matriks K= $\tilde{K}Q^{-1} = \tilde{B}_1^{-1}[\tilde{A}_1 - \tilde{D}_1]Q^{-1}$

Polinomial [Es – A]X + BY = U(s) mempunyai solusi hanya jika rank[Es – A, B] = n untuk $s \in \mathbb{C}$, dengan s berhingga dan D = Es – U(s) matriks real yang independen terhadap s. Kemudian jika system terken-dali dan matriks Es – U(s) = A – BK = D $\in R^{nxn}$ serta matriks E, A, B dapat ditransformasi dengan matriks nonsingular P, Q sehingga memenuhi persamaan (19). Dengan demikian polinomial matriks verbentuk [Es – A]X + BY = U(s) mempunyai solusi X dan Y yaitu X = I_n dan Y = K jika dan hanya jika $\tilde{D}_2 = \tilde{A}_2$.

DAFTAR PUSTAKA

Bunse, A.G, et al., 1999, Feedback Design for Regularizing Descriptor Systems, *Linear Algebra and Application*, No. 299.

Chen, C.T., 1984. *Linear System Theory and Design,* Holt, Rinehart and Winston, New York.

Cobb, C.T., 1984, Controllability, Observability and Duality in Singular Systems, IEEE Trans Aut. Control, Vol. AC-29, No.12, pp. 1076-1082

Cullen, C., 1966, *Matrices and Linear Transformations*, Addison-Wesley Pub. Co., Massachusetts, USA.

Dai, L., 1988, Lecture Notes in Control and Information Science, *Singular Con-trol Systems*, Springer-Verlag, Ber-lin Heidelberg New York.

Dai, L., 1989, *Singular Control Systems*, Springer, Berlin.

Kaczorek, T., 1993, *Linear Control Systems, Vol.1 and 2*, New York, Wiley.

Kaczorek, T., 2003, *Relationship between Infinite Eigenvalue Assignment for Singular and solvability of Polynomial matrix Equations*, Proc. 11th Mediterranean Conf. Control and Automation MED'03, Rhodes, Greece.

Kaliath, T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.

Kučera, V., 1981, *Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems*, Academia, Praque.

Olsder, G.J., 1994, *Mathematical Systems Theory,* Delftse Uitgevers Maatschappij, Delft, Netherlands.

Suryowati, K., et al., 2002, Dekomposisi Standar Sistem (E,A,B,C), *Jurnal Matematika* Universitas Negeri Malang.

Wonham, W.M., 1979, *Linear Multivariate Control: A Geometric Approach*, Springer, New York.