ANALISIS OBSERVASI KEADAAN SISTEM SINGULAR LTI ATAS DEKOMPOSISI STANDAR

Kris Suryowati [1]

ABSTRACT

The singular system LTI is called linear singular system time invariant which its not be influence of the time changes. It is assumed to be the system is regular and rank E< n, so can be transform to form the standard decomposition. Furthermore, we discuss characterization the singular state observer and there is determine the necessary and sufficient condition for the state observer singular of system. Suppose that first sub systems in the decomposition standard system is observable. Then singular system LTI has a singular state observer. Singular system has a singular state observer if and only if it is detectable.

Keywords: *Singular linear system, Standard Decomposition, State Observer*

ABSTRAK

Sistem singular LTI merupakan sistem singular linear time invariant (LTI) atau sistem linear singular yang tidak dipengaruhi oleh perubahan waktu. Dalam hal ini diasumsikan bahwa sistemnya regular dan rank E < n, sehingga dapat diubah ke bentuk system dekomposisi standar. Selanjutnya dibahas karakterisasi keadaan observer singular dan menentukan syarat perlu dan syarat cukup suatu sistem mempunyai observer singular. Jika pada bentuk system dekomposisi, sub sistem pertama terobservasi maka sistem terdeteksi sehingga system mempunyai state observer singular. Sistem singular LTI mempunyai state observer singular jika dan hanya jika sistemnya terdeteksi.

Kata kunci: *Sistem linear singular, Dekomposisi Standar, state observer*

PENDAHULUAN

Sistem singular LTI merupakan sistem singular L*inear Time Invariant* (LTI) atau sistem linear singular yang tidak dipengaruhi oleh perubahan waktu.

Kontrol keadaan feedback sangat penting dalam rancangan sistem. Atas kondisi-kondisi tertentu, keperluan metode-metode ini pada struktur penempatan kutub sedemikian sehingga sistem loop tertutup mempunyai sifat-sifat yang diharapkan. Banyak kenyataan menunjukkan bahwa untuk sistem deterministik metode keadaan feedback adalah tepat atau baik sekali dan praktis untuk menyelesaikan kasus-kasus. Metode ini, berdasar pada asumsi bahwa sistem berada pada keadaan yang sesuai yaitu keseluruhan vektor keadaan dapat diamati, misalkan sistemnya terkendali maka dapat menstabilkan sistem yang tidak stabil dengan memberikan keadaan feedback yang sesuai. Tetapi pada kenyataannya di dalam praktek kasus-kasus keadaan sistem tidak selalu ditentukan secara langsung, sehingga memerlukan alat pengukuran yang sangat mahal untuk mengamati keseluruhan keadaan, misalnya pada sistem ekonomi, sistem alam, sistem pada satelit dan sebagainya.

Pada kondisi seperti tersebut diperlukan suatu konstruksi vektor keadaan sistem linear singular dari vektor input dan vektor output yang tersedia, yang selanjutnya disebut pengobservasi. Masalah–masalah pengobservasi, khususnya pada sistem singular LTI sangat penting dan menarik karena merupakan masalah yang *general* pada masalah teori control sistem singular.

Pada sistem singular LTI dalam hal ini diasumsikan bahwa sistemnya regular untuk menjamin keberadaan dan solusi tunggal sistem, kemudian dalam bentuk dekomposisinya menggunakan bentuk dekomposisi standar sistem.

[1] Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Sains Terapan IST “Akprind

Dalam menganalisis observasi keadaan sistem singular LTI meliputi keadaan observer singular, keadaan observer normal dan struktur general pada state observer.

Tetapi pada artikel ini dibatasi hanya membahas keadaan observer singular, dengan menggunakan dekomposisi standar sistem maka akan ditentukan syarat perlu dan cukup suatu sistem mempunyai observer singular dan menentukan eksistensi keadaan observer singular.

Permasalahan pengobservasi pada sistem linear normal waktu kontinu berparameter tetap dengan multivariabel dikembangkan oleh Luenberger sejak tahun 1966.

Kwakernaak dan Sivan (1972) dan Olsder (1994) memberikan kriteria tentang kestabilan sistem linear normal dan kestabilan pengobservasi khususnya kriteria stabil asimtotis. Pada Dai (1988) memberikan kriteria kestabilan pengobservasi pada sistem linear singular, keadaan observasi sistem linear singular. Pada sistem linear singular diasumsikan bahwa sistemnya regular, untuk menjamin keberadaan dan ke-tunggalan solusi sistem (Dai, 1988 dan Suryowati, 2001).

Bunse, dkk (1999) pada *Feedback Design for Regularizing Descriptor Systems* dibahas tentang rancangan *feedback* sistem linear diskriptor dan sistem dekomposisinya menggunakan dekomposisi singular, pada penelitian ini sistemnya regular dan dibawa ke bentuk dekomposisi standar sistem.

Bentuk umum dari sistem singular LTI adalah sebagai berikut:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (1)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

dengan $x(t) \in R^n$ vektor keadaan, $u(t) \in R^m$ vektor masukan (vektor kendali), $y(t) \in R^r$ vektor output, dan $A,E \in R^{nxn}$; $B \in R^{nxm}$; $C \in R^{rxn}$ matriks-matriks konstan. Dengan rank E = q < n dan diasumsikan sistem tersebut regular yaitu matriks pencil (sE-A) regular (Dai, 1988)

Definisi 1.1. (Gantmacher, 1960)

Matriks pencil (E,A) regular jika terdapat konstanta skalar $\alpha \in C$ sedemikian sehingga $|\alpha E + A| \neq 0$ atau polinomial $|sE - A| \not\equiv 0$.

Lemma 1.2.

Matriks pencil (sE-A) regular jika dan hanya jika terdapat matrix Q dan P nonsingular sehingga QEP = diag(I_{n_1}, N) dan QAP = diag(A_1 , I_{n_2}) , dengan $n_1 + n_2 = n$, $A_1 \in R^{n_1 x n_1}$, $N \in R^{n_2 x n_2}$ nilpoten.

Melalui transformasi $x = P\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ dan menerapkan Lemma 1.2 sehingga diperoleh bentuk dekomposisi standar sistemnya sebagai berikut:

$$\dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + B_1u(t)$$
(2)
$$y_1(t) = C_1x_1(t)$$

$$N\dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_1u(t)$$
(3)
$$y_2(t) = C_2x_2(t)$$

dengan CP = [C_1 , C_2] ; QB = $\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$;

$B_1 \in R^{n_1 xn}$; $B_2 \in R^{n_2 xn}$; $x_1 \in R^{n_1}$; $x_2 \in R^{n_2}$.

Persamaan (2) disebut subsistem normal, sedangkan persamaan (3) subsistem linear singular khusus, N adalah matriks nilpoten dengan usuran yang sesuai.

(Dai (1988), Suryowati, dkk (2002))

Definisi 1.3.

Sistem singular LTI disebut controlable jika untuk setiap $t_1>0$, $x_1(0)$, $w \in R^n$ terdapat masukan kendali $u(t) \in R^m$ yang memenuhi $x(t_1) = \begin{bmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \end{bmatrix} = w$

Selanjutnya diberikan matriks $\Re_s$ = [B_1 , A_1B_1 , $A_1^2B_1$, … , $A_1^{n_1-1}B_1$] dan $\Re_f$ = [B_2 , NB_2 , N^2B_2 , … , $N^{h-1}B_2$] yang didefinisikan sebagai matriks *controllability* pada subsistem (2) dan subsistem (3).

Didefinisikan $\mathrm{Im}\Re = \mathrm{Im}\Re_s \oplus \mathrm{Im}\Re_f$ dengan $\mathrm{Im}\Re$ subruang *controllability* sistem singular LTI, $\mathrm{Im}\Re_s$ subruang *controllability* subsistem lambat dan $\mathrm{Im}\Re_f$ subruang keterkendalian subsistem (3).

(Cobb, 1984)

Definisi 1.4

Sistem singular LTI terobservasi jika kondisi awal $x(0)\in R^n$ dapat ditentukan secara tunggal oleh $u(t)\in R^m$, $y(t)\in R^r$, $0\le t<\infty$.

Teorema 1.5

Sistem singular LTI terobservasi jika dan hanya jika pada bentuk dekompo-sisi standar pada persamaan (2) dan (3), subsistem pertama dan subsistem kedua terobservasi.

Definisi 1.6

Diberikan $u(t) \equiv 0$ untuk $t > 0$ dan $x(0) = x_0\in R^n$. Sistem singular LTI disebut stabil jika

1. *Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ yang memenuhi $\|x(0)\|<\delta$ maka $\|x(t;x_0)\| < \varepsilon$ untuk semua $t > 0$*
2. $\lim\limits_{t\to\infty} x(t;x_0) = 0$ *untuk semua $x_0\in R^n$*

Definisi 1.7

Sistem singular LTI dikatakan terstabilkan jika terdapat suatu keadaan feedback sedemikian sehingga sistem loop tertutup stabil.

Teorema 1.8

Sistem singular LTI dikatakan stabil jika dan hanya jika $\sigma(E,A)\subset\mathbb{C}^-$

Teorema 1.9

Sistem singular LTI terstabilkan jika dan hanya jika rank$[sE-A , B] = n$, $\forall s\in\overline{C}^+$, s hingga

Definisi1.10

Sistem singular LTI dikatakan terdeteksi jika sistem dualnya terstabilkan.

Teorema 1.11

Sistem singular LTI terdeteksi jika dan hanya jika rank $\begin{bmatrix} sE-A \\ C \end{bmatrix} = n$, $\forall s\in\overline{C}^+$, s hingga.

Pada dekomposisi standar sistem, keterdeteksian suatu sistem ditentukan oleh sifat keterobservasian pada sub sistem pertama yaitu jika sub sistem pertama terobservasi maka sistemnya terdeteksi yaitu ekuivalen dengan *rank* $\begin{bmatrix} sE-A \\ C \end{bmatrix} = n$, $\forall s\in\overline{C}^+$, s hingga.

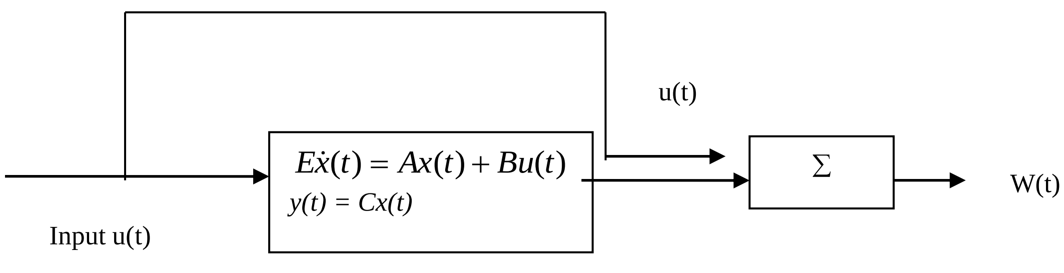
STATE OBSERVER SINGULAR

Pada sistem singular LTI (1) vektor keadaan awal sistemnya yaitu x(0) biasanya tidak diketahui lebih lanjut. Dan sulit direkontruksi secara tepat keadaan x(t). Sebut saja observer keadaan (state observer) yaitu rekontruksi keadaan bersifat asimtotik. Diambil notasi sistem Σ yang merupakan state observer untuk sistem linear singular (1) yang memenuhi dua syarat perlu, sebagai berikut

1. Input pada Σ akan mengkontrol input dan ukuran output sistem (1)
2. outputnya harus memenuhi kondisi asimtotik, $\lim\limits_{t\to\infty}(w(t)-x(t)) = 0$

persamaan tersebut berlaku untuk semua kondisi awal x(0).

Suatu sistem yang memenuhi dua kondisi tersebut di atas maka disebut keadaan observer untuk sistem singular (1).



Gambar 1 state observer

Dalam menentukan perhitungan observasi di atas berikut definisi keadaan observer untuk sistem singular LTI

Definisi 2.1
Diberikan sistem singular LTI pada persamaan (1). Jika sistem berikut

$$E_c \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c u(t) + Gy(t)$$
$$w(t) = F_c x_c(t) + Fy(t) + Hu(t) \qquad (2.1)$$

dengan $x_c(t) \in R^{n_c}$, $w(t) \in R^n$, E_c, $A_c \in R^{n_c x n_c}$, *B_c, G, F_c, F dan H matriks konstan dengan ukuran yang sesuai dan memenuhi*

$$\lim_{t\to\infty} (w(t) - x(t)) = 0 \qquad (2.2)$$

untuk setiap kondisi awal $x_c(0)$, $x(0)$ maka sistem (2.1) disebut suatu keadaan observer untuk sistem singular LTI (1). Jika rankE_c < n_c, observer (2.1) disebut observer singular.
Jika rank $E_c = n_c$, $E_c = I_{nc}$ maka observer (2.1) disebut observer normal.

Lebih jelasnya, observer normal adalah sama seperti observer dalam teori sistem linear.
Dalam pembahasan ini hanya difokuskan pada metode rancangan untuk observer singular

Teorema berikut merupakan syarat perlu bahwa sistem singular LTI (1) mempunyai state observer singular.

Teorema 2.2
Andaikan sistem singular LTI (1) terdeteksi (detectable). Maka sistem singular LTI (1) mempunyai bentuk observer singular sebagai berikut

$$E\dot{x}_c(t) = Ax_c(t) + Bu(t) + G(y(t) - Cx_c(t))$$
$$w(t) = x_c(t) \qquad (2.3)$$

sedemikian sehingga
$\lim_{t\to\infty} (w(t) - x(t)) = 0$, *untuk setiap x(0) dan $x_c(0)$ yang diberikan*.

Bukti
Dari asumsi, diketahui kondisi terdeteksi untuk sistem (1), maka terdapat matriks $G \in R^{nxr}$ yang memenuhi

$$\sigma(E, A - GC) \subset \mathbb{C}^- \qquad (2.4)$$

Perhatikan sistem (2.3) ditentukan oleh matriks G.
Ambil e(t) = w(t) – x(t)
e(t) = $x_c(t)$ – x(t),
e(t) estimasi error antara keadaan real dan keadaan estimasi.
Sehingga e(t) memenuhi

$$\dot{e}(t) = \dot{x}_c(t) - \dot{x}(t)$$
$$E\dot{e}(t) = E\dot{x}_c(t) - E\dot{x}(t)$$
$$E\dot{e}(t) = (A - GC)e(t)$$
$$e(0) = x_c(0) - x(0).$$

Sehingga dengan (2.4) dan teorema kestabilan sistem singular LTI, yaitu sistem stabil jika dan hanya jika $\sigma(E,A) \subset \mathbb{C}^-$ diperoleh

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty} (w(t) - x(t)) = 0,$$

untuk setiap x(0) dan $x_c(0)$ yang diberikan.♦

Pada persamaan state untuk observer singular dalam persamaan (2.3) ,
Pertama, dua term sama sebagai korespondensi pada persamaan sistem singular(1) dan ada tiga term $G(y(t)-Cx_c(t))$ dalam ruas kanan persamaan (2.3), yang kenyataannya bahwa modifikasi error dengan meletakan tanpa kondisi awal $x_c(0)$ sedemikian w(t) estimasi x(t) secara asimtotik.
Selanjutnya, $x_c(t)$ = x(t) menunjukkan $x_c(0)$ = x(0).

Contoh 1
Diberikan sistem singular LTI sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

y(t) = [0 1 0 0 0]x(t)

Tentukan keadaan observer untuk sistem tersebut.
Penyelesaian
- Mengecek bahwa sistem tersebut terdeteksi

Dengan **Teorema 10,** yaitu
Sistem singular LTI terdeteksi jika dan

hanya jika rank $\begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n,\ \forall s \in \overline{C}^{+}$

, s hingga.

Menentukan rank $\begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix}$

$$sE\text{-}A = s\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2s & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3s & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -4s & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$rank \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} =$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 2s & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3s & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -4s & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4$$

Jadi sistem terdeteksi.

- Menentukan observer singular sistem, sebagai berikut

Pertama-tama menentukan matriks G, Karena sistem terdeteksi maka terdapat matriks G sedemikian sehingga memenuhi hubungan

$\sigma(E, A - GC) \subset \mathcal{C}^{-}$

Misalkan matriks G = [g_1, g_2, g_3, g_4] ^{T}
Diperoleh

$|sE - (A\text{-}GC)|$

$$= \text{Det} \left(s\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 2s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & 0 \\ 0 & g_3 & 0 & 0 \\ 0 & g_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \text{Det} \begin{bmatrix} 2s & g_1 & 0 & -1 \\ 0 & 3s + g_2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 + g_3 & -4s & 0 \\ -1 & g_4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$= 4.2.3.2\ s^3 + (4.3 + g_2 4.2.2)s^2 + (4g_2 - 2.2.g_3)s + 1 - g_3 - g_4 + 2g_1$

$= 48\ s^3 + (12 + 16g_2)\ s^2 + (4g_2 - 4g_3)s + 1 - g_3 - g_4 + 2g_1$

Karena $\sigma(E, A - GC) \subset \mathcal{C}^{-}$, yang artinya himpunan akar karakteristik terletak di sebelah kiri bidang komplek, atau akar-akar karakteristik mempunyai bagian riel yang negatif.

Misalkan diambil
$48\ s^3 + (12 + 16g_2)s^2 + (4g_2 - 4g_3)s + 1 - g_3 - g_4 + 2g_1 = 48(s+2)^3$

$48\ s^3 + (12 + 16g_2)s^2 + (4g_2 - 4g_3)s + 1 - g_3 - g_4 + 2g_1 = 48(s^3 + 6s^2 + 12s + 8)$
$48\ s^3 + (12 + 16g_2)\ s^2 + (4g_2 - 4g_3)s + 1 - g_3 - g_4 + 2g_1 = 48s^3 + 288s^2 + 576s + 384$

Sehingga diperoleh
$(12 + 16g_2) = 288$, maka $g_2 = 17{,}25$
$4g_2 - 4g_3 = 576$, maka $g_3 = 126{,}75$
Misalkan diambil $g_1 = 0$
$1 - g_3 - g_4 + 2g_1 = 384$, $g_4 = -509{,}75$

Diperoleh matriks
G = [0 17,25 126,75 -509,75]

Jadi persamaan
. $|sE - (A\text{-}GC)| = 48(s+2)^3$

Artinya $\sigma(E, A - GC) = \{-2,-2,-2\} \subset \mathcal{C}^{-}$,

Untuk suatu matriks G yang dipilih berdasarkan perhitungan di atas yaitu
G = [0 17,25 126,75 -509,75]

Dengan demikian berdasarkan Teorema 2.2, maka state observer untuk sistem pada contoh 1 diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x_c(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) + G(y(t) - Cx_c(t)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -17,25 & 1 & 0 \\ -1 & -125,75 & 0 & 0 \\ 1 & 509,75 & 0 & 2 \end{bmatrix} x_c(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 17,25 \\ 126,75 \\ -509,75 \end{bmatrix} y(t)$$

$w(t) = x_c(t)$

Syarat perlu dan syarat cukup suatu sitem singular LTI mempunyai observer singular pada (2.3), dinyatakan pada teorema berikut

Teorema 2.3
Sistem singular LTI (1) mempunyai observer singular (2.3) jika dan hanya jika sistem tersebut dapat terdeteksi (detectable)
Bukti

($\Leftarrow$) **Syarat cukup**
Jika sistem singular LTI (1) dapat terdeteksi maka sistem tersebut mempunyai observer singular pada persamaan (2.3). sudah dibuktikan pada Teorema 2.2 .

($\Rightarrow$) **Syarat perlu**
Jika sistem singular LTI (1) mempunyai observer singular (2.3) maka sistem tersebut dapat terdeteksi.

Asumsi bahwa (2.3) merupakan observer singular untuk sistem singular (1).
Maka harus memenuhi
$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$, untuk setiap x(0) , $x_c(0)$ yang diberikan
(2.5)
Karena error e(t) = w(t) – x(t), maka memenuhi $E\dot{e}(t)$ = (A-GC)e(t) ;
$e(0) = x_c(0) - x(0)$
(2.6)
kemudian dari persamaan (2.5) menunjukkan bahwa sistemnya stabil.
Selanjutnya σ(E,A-GC) $\subset \mathbb{C}^-$, ini dengan Teorema 7, ekuivalen dengan sistemnya stabil yaitu sistem singular LTI (1) adalah terdeteksi. ♦

Jika matriks E = I_n (matriks identitas berukuran n) mengikuti Teorema 2.2 dan Teorema 2.3 menghasilkan dengan baik (well know result) teori sistem linear.
Atas asumsi keterdeteksian, keadaan x(t) ,(state x(t)) dapat direkontruksi secara asimtotik dengan observer dari informasi u(t) dan y(t) yang ditentukan secara langsung.

Definisi 2.4
Sistem singular LTI (1) disebut detectable (dapat terdeteksi) jika sistem singular LTI (1) mempunyai observer singular (2.3).

Pengertian keterdeteksian sistem sesuai atau konsisten dengan definisi keterdeteksian sistem (pada state feedback).

Contoh 2
Diberikan sistem singular LTI pada rangkaian RLC sederhana sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

y(t) = [0 1 0 0 0]x(t)

Selanjutnya akan diperiksa apakah sistem tersebut terdeteksi, kemudian menentukan state observer singular untuk sistem tersebut.

Penyelesaian
Pada bentuk dekomposisi standar sistem dapat dilihat pada suryowati, dkk, (2002).
Subsistem pertama pada bentuk dekomposisi standar, terobservasi jika
rank $\begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix}$ = n, $\forall$ s$\in \overline{\mathbb{C}}^+$, s hingga.

Selanjutnya jika subsistem pertama teorservasi maka sistem singular LTI mempunyai sifat terdeteksi.
Atau lebih jelasnya pada dekomposisi standar sistem, keterdeteksian suatu sistem ditentukan oleh sifat

keterobservasian pada sub sistem pertama, yaitu jika sub sistem pertama terobservasi maka sistemnya terdeteksi.

Menentukan

$$\text{rank}\begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} =$$

$$\text{rank}\begin{bmatrix} sC_1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & sC_2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -sL & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -R \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4 = n$$

Jadi subsistem pertama terobservasi, dengan demikian maka sistem terdeteksi.

Menentukan state observer singular
diambil matriks G = [g_1, g_2, g_3, g_4] ^{T}
Diperoleh
Det (sE – (A-GC)) = $|sE - (A-GC)|$
= $LC_1C_2 Rs^3 + (LC_2 + g_2 LC_1R)s^2 +$
$(g_2L - g_3 C_1R)s + 1 - g_3 - g_4 + g_1R$
Misal diambil

$g_1 = 0$

$$g_2 = \frac{C_2}{C_1R}(3C_1R - 1)$$

$$g_3 = \frac{1}{C_1R}(-3LC_1C_2 R + C_1R + g_2 L)$$

$g_4 = 1 - g_3 - LC_1C_2 R$

sehingga persamaan menjadi
$|sE - (A-GC)| = LC_1C_2 Rs^3 +$
$+ (LC_2 + g_2 LC_1R)s^2 + (g_2L - g_3 C_1R)s +$
$+ (1 - g_3 - g_4 + g_1R)$
$|sE - (A-GC)| = LC_1C_2 R(s+1)^3$

Jadi $\sigma(E, A-GC) = \{-1, -1, -1\} \subset \mathbb{C}^-$

Untuk matriks G,

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{C_2}{C_1R}(3C_1R-1) \\ \frac{1}{C_1R}(-3LC_1C_2R + C_1R + g_2L) \\ (1 - g_3 - LC_1C_2R) \end{bmatrix}$$

Sehingga dengan Teorema 2.2 state observer untuk sistem pada rangkaian RLC sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{x}_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & R \end{bmatrix}x_c(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix}y(t)$$

$w(t) = x_c(t)$

KESIMPULAN

Sistem singular LTI merupakan sistem linear singular time invariant. *observer* keadaan (state *observer*) pada Sistem singular LTI yaitu rekontruksi keadaan bersifat asimtotik. Diambil notasi sistem Σ yang merupakan state observer untuk sistem linear singular (1) yang memenuhi dua syarat perlu, sebagai berikut
Input pada Σ akan mengkontrol input dan ukuran output sistem singular LTI (1) dan jugaoutputnya harus memenuhi kondisi asimtotik,

$$\lim_{t \to \infty}(w(t) - x(t)) = 0$$

persamaan tersebut berlaku untuk semua kondisi awal x(0).
Suatu sistem yang memenuhi dua kondisi tersebut di atas maka disebut keadaan observer untuk sistem singular LTI (1).

Sistem singular LTI (1) mempunyai observer singular (2.3) jika dan hanya jika sistem tersebut dapat terdeteksi (detectable),
Sistem singular LTI terdeteksi jika dan hanya jika rank $\begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n, \ \forall \ s \in \overline{\mathbb{C}}^+$, s hingga, yang berakibat

$\sigma(E, A-GC) = \{-1, -1, -1\} \subset \mathbb{C}^-$

Matriks G dapat ditentukan dan sifatnya tidak tunggal.

Pada bentuk dekomposisi standar sistem, maka jika sub sistem pertama terobservasi maka sistem terdeteksi, maka sistem singular LTI (1) mempunyaiobserver singular (2.3).

DAFTAR PUSTAKA

Bunse, A.G., dkk, 1999, Feedback Design for Regularizing Descriptor Systems, *Linear Algebra and Application,* No.299.
Cobb,J.D, 1984, Controllability, Observ-ability and Duality in Singular

Systems, *IEEE Trans Aut. Control,* Vol.AC-29, No.12, pp. 1076-1082

Dai, L., 1988, Input Funtion Observers for Linear Singular System, *Acta Math Scientia*, Accepted.

Dai, L., 1988, Lecture Notes in Control and Information Sciences, *Singular Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

Gantmacher, F.R, 1960, The Theory of Matrices, Volume 1, Chelsea Publishing Company, New York.

Gantmacher, F.R, 1960, The Theory of Matrices, Volume 2, Chelsea Publishing Company, New York.

Olsder, G.J.,1994, Mathemathical Systems Theory, Delftse Uitgevers Maatschappij, Delft, Netherlands.

Suryowati, dkk., 2002, Bentuk dekomposisi standar sistem (E,A,B,C) singular**,** artikel, Dipublikasikan di Jurnal Matematika dan Pembelajarannya, UM, Malang