ANALISIS *PSEUDOINVERS* DAN APLIKASINYA PADA REGRESI LINEAR BERGANDA

Kris Suryowati[1]
[1]Program Studi Statistika, Fakultas Sains Terapan, Institut Sains dan Teknologi Yogyakarta
email_krisnaroz@gmail.com

INTISARI

Matriks invers tergeneralisir merupakan matriks balikan dari suatu matriks yang bersifat umum yaitu matriks berordo nxm dapat dipandang mempunyai invers yang disebut invers tergeneralisir, Misalkan suatu matriks Q berordo nxm, tidak mempunyai determinan, maka dapat ditentukan matriks P sedemikian sehingga memenuhi QPQ = Q dalam hal ini matriks P disebut matriks invers tergeneralisir, apabila matriks P memenuhi syarat tambahan yaitu memenuhi PQP = P, $(PQ)^H$ = PQ, $(QP)^H$= QP maka matriks P bersifat tunggal dan matriks P disebut pseudoinvers atau invers semu bagi matriks Q yang dinotasikan Q^g. Pada artikel ini akan dibahas atau dikaji sifat ketunggalan pseudoinvers matriks P, yang akan ditunjukkan syarat perlu dan syarat cukup matriks P tunggal. Selanjutnya matriks P tersebut akan diaplikasikan untuk menyelesaikan masalah regresi linear berganda.

Kata kunci: *invers tergeneralisir, invers semu, model regresi linear ganda*

1. PENDAHULUAN

Matriks berordo n atas lapangan bilangan real mempunyai invers atau bersifat invertible jika matriksnya non sigular yaitu mempunyai determinan yang tidak nol. Misalkan suatu matriks A berordo n, dengan det(A) ≠ 0 maka matriks A mempunyai invers, misalkan matriks B merupakan invers dari matriks A sehingga memenuhi AB = BA = I_n dengan I_n merupakan matriks identitas berordo n pada Anton, H, 2005.

Apabila determinan matriksnya nol atau matriksnya berordo nxm maka dalam teori Aljabar Linear, matriks tersebut tidak punya invers.Namun demikian pada pembahasan matriks generalisasi, matriks yang determinannya nol dan juga berordo nxm mempunyai invers dan lebih lanjut inversnya disebut matriks invers tergeneralisir. Misalkan suatu matriks Q berordo nxm atau matriks Q mempunyai determinan nol, invers matriks Q tidak terdefinisi, tetapi dapat ditentukan misalkan matriks P merupakan matriks invers tergeneralisir yang memenuhi QPQ = Q dan matriks P tersebut tidak tunggal. Ada beberapa syarat tambahan apabila matriks P memenuhi sifat ketunggalan yaitu pada matriks P harus memenuhi sifat PQP = P, (PQ)'= PQ , (QP)'= QP dan lebih lanjut matriks P disebut matriks pseudoinvers atau invers semu bagi matriks Q (Setiadji, 2003 dan Ben-Israel, dkk, 2003). Berdasarkan sifat ketunggalannya sehingga pada aplikasinya invers semu atau pseudoinvers dapat diterapkan khususnya untuk menyelesaikan masalah regresi linear berganda.

Analisis Regresi linear berganda digunakan untuk mengetahui hubungan antara vareabel tidak bebas dengan dua atau lebih vareabel bebas.Bentuk umum model regresi linear berganda dengan vareabel dependen (Y) dan vareabel independen $x_1, x_2, \cdots, x_p$ disajikan sebagai berikut

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_p x_p + e, \quad e \sim N(0,\sigma^2), \quad Residual\ e = Y - \hat{Y}$$

dengan β_i, i = 1,2, ..., p koefisien regresi yang berarti besarnya perubahan pada $\hat{Y}$, jika X_i bertambah satu satuan dan variabel yang lain konstan, β_0 adalah *intercept*. Residual e mengikuti distribusi normal dengan rata-rata 0 dan varians konstan sebesar σ^2.

Pada penelitian ini akan dibahas analisis matriks invers semu meliputi pengertian dan karakterisasinya yaitu sifat ketunggalannya, beberapa metode menentukan pseudoinvers dan aplikasinya pada analisis regresi linear berganda untuk menentukan estimator koefisien β.

Pada pembahasananya dibatasi pada matriks dengan entrynya bilangan real R, untuk membantu proses perhitungan digunakan software MATLAB serta diberikan contoh aplikasi real pada pembentukan model regresi linear berganda pada masalah sederhana.

Pengertian Matriks dan Jenis-jenis Matriks
Pengertian dan jenis-jenis matriks disajikan pada definisi – definisi berikut
Definisi 1.
Matriks (*matrix*) adalah susunan segi empat siku-siku dari elemen-elemen yang dapat berupa pernyataan simbolis ataupun bilangan-bilangan.Atau matriks merupakan susunan objek-objek yang disusun berdasarkan baris dan kolom, dengan demikian suatu matriks pasti mempunya jumlah baris dan jumlah kolom, objek–objek atau elemen-elemen dalam hal ini sering disebut entri dari matriks (Leon, S. J, 2001; Suryowati dan Harmastuti, 2013).
Definisi 2. Matriks berordo nxm
Matriks A berordo nxm jika banyaknya baris n dan banyaknya kolom m. Apabila banyaknya baris dan banyaknya kolom suatu matriks sama maka dikatakan matriks rersebut berordo n, sering dikatakan matriks bujur sangkar, selanjutnya matriks A berukuran nxn dinotasikan dengan $A_{n.}$
Definisi 3.
Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen pada diagonal utama bernilai real dan elemen lainnya bernilai nol.
Notasi A = (a_{ij}) dengan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$; a_{ij} = real untuk $i = j$
Matriks $I_n = [\delta_{ij}]$, δ_{ij} disebut delta Kronecker, didefinisikan oleh $\delta_{ij} = 1$ untuk i = j dan $\delta_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ yang disebut matriks identitas berukuran n, dinotasikan I_n
Definisi 4.
Jika A adalah matriks $m \times n$, maka transpose dari A (*transpose of A*), dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A; sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A, dan seterusnya (Anton dan Rorres, 2004).
Konjugate transpose suatu matriks dinotasikan dengan A^H yang didefinisikan sebagai $A^H = \bar{A}^T$ dengan $\bar{A}$ merupakan matriks konjugate dimana entri-entri yang bersesuaian pada matriks A dan $\bar{A}^T$ transpose dari matriks $\bar{A}$.
Definisi 5.(Anton dan Rorres, 2004).
Matriks A berukuran $n \times n$ adalah simetrik (*symmetric*) jika $A = A^T$
Jika memenuhi $A^H = A$ maka matriks A disebut matriks hermit.

Pengertian invers Matriks
Jika A suatu matriks persegi dan matriks B berukuran sama dengan A sedemikian sehingga memenuhi AB = BA = I, maka A disebut bisa dibalik dan B disebut invers dari A atau ditulis dengan $B = A^{-1}$. Suatu matriks yang dapat dibalik mempunyai tepat satu invers, sehingga A bersifat invertible artinya matriks A dapat dibalik. **(Suryowati dan Harmastuti, 2013)**
Definisi 6.
Matriks *A berodo n* dikatakan mempunyai invers (*invertible*) jika ada matriks B sehingga $AB = BA = I_n$.
Jika A dan B dua matriks berukuran $n \times n$ dan AB adalah matriks identitas I_n, maka A disebut invers kiri dari B dan B disebut invers kanan dari .
Teorema 1.*Matriks yang invertible hanya memeliki tepat satu invers*. Dan invers matriks A adalah $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} . Adj(A)$
Matriks Semu (Pseudoinvers) suatu matriks
Matriks singular berordo n dan matriks berordo nxm secara umum tidak punya invers. Pada (Goldberg,J.L., 1991) pengertian umum matriks ivers tergeneralisir sebagai berikut diberikan matriks A berordo m xn atas lapangan bilangan real R, terdapat suatu matriks G yang memenuhi

1. GAG = G
2. AGA = A
3. $(GA)^H = GA$
2. $(AG)^H = AG$

apabila matriks G memenuhi ke empat sifat tersebut maka matriks G disebut pseudoinvers atau invers semu dari matriks A selanjutnya dinotasikan sebagai A^g.
Analisis Regresi linear berganda (sembiring, 1995)

Analisis regresi linear berganda berfungsi untuk menentukan hubungan satu vareabel tidak bebas dengan dua peubah atau lebih vareabel bebas. Bentuk umum model regresi linear berganda dengan vareabel tidak bebas Y yang dipengaruhi vareabel bebas $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sebagai berikut,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_p x_p + e$$

dengan asumsi e berdistribusi normal dengan μ = 0 dan varians konstan sebesar σ^2

2. METODOLOGI

Metode Penelitian dalam hal ini yaitu tahapan-tahapan yang digunakan dalam analisis dan pembahasan. Penelitia ini studi literatur dengan mengumpulkan bahan-bahan literatur yang diperoleh dari penelusuran internet maupun dari perpustakaan di Institut juga perpustakaan di jurusan Matematika UGM. Kemudian mengkajinya melalui menganalisis teori dalam hal ini menjabarkan definisi-definisi yang diperjelas dengan membuat contoh-contoh terkait, membuktikan teorema-teorema yang menunjang serta mengaplikasikannya. Penelitian ini mengkaji pengertian dan konsep serta karakterisasi matriks invers semu untuk matriks ordo nxm. Selanjutnya menerapkan invers semu (*pseudoinvers)* untuk mengestimasi koefisien vareabel pada regresi linear berganda.

Langkah-langkah penyelesaiannya sebagai berikut,

a. Menganalisis pengertian matriks invers semu, menunjukkan sifat ketunggalannya, melalui karakterisasi syarat perlu dan syarat cukup untuk memenuhi sifat tersebut.
b. Menentukan invers semu suatu matriks dengan beberapa metode.
c. Menerapkan pada analisis regresi linear berganda dalam hal ini menentukan estimasi koefisien vareabel pada regresi linear berganda.

3. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

1. Analisis Matriks Invers semu (pseudoinvers)

Invers matriks tergeneralisasi (Generalized Inverses of Matrix) dapat digunakan untuk menggeneralisasi pengertian invers matriks. Terkait penjelasan tentang pengertian matriks semu atau pseudo invers sudah disajikan pada pembahasan di atas. Teorema mengenai sifat ketunggalan matriks invers semu,

Theorema

Invers semu (pseudoinvers) matriks A adalah tunggal. Atau Matriks G = A^g bersifat tunggal.

Bukti:

Berdasarkan definisi invers semu bahwa jika suatu A^g dikatakan invers semu bagi matriks A apabila matriks A^g memenuhi keempat sifat diatas.

Matriks A^g tunggal artinya misalkan terdapat dua matriks pseudoinvers lain yaitu C maka harus memenuhi C = A^g . Untuk membuktikan sifat tunggal untuk matriks A^g , ditunjukkan bahwa jika X sebarang matriks yang memenuhi persamaan bagi A^g , maka

$XAA^H = A^H$ .... (1)

dan $X^H = AB_1$ untuk suatu matriks B_1 .... (2)

Dari persamaan (1) dihasilkan dari kombinasi konjugate transpose pada AXA = A dan $(XA)^H = XA$. Selanjutnya konjugat transpos dari XAX = X , menggunakan $(AX)^H = AX$ menghasilkan $X^H = X^H A^H X^H = A(XX^H) = AB_1$. untuk$B_1 = XX^H$ A^g memenuhi persamaan (1) dan (2) untuk sebarang matriks yang diberikan, misalnya untuk matriks B_2. dengan menggunakan (1) diperoleh

$(X - A^g)AA^H = XAA^H - A^gAA^H = A^H - A^H = 0$

$(X - A^g)AA^H = 0$ berarti

$(X - A^g)A = 0$ .... (3)

Dengan persamaan (2)

$$(X - A^g) = (B_1^H - B_2^H)A^H$$

Sehingga dihasilkan

$$(X - A^g)C\,C^H = (B_1^H - B_2^H)A^H CC^H$$

$$= B_1^H A^H CC^H - B_2^H A^H CC^H$$

$$= (AB_1)^H CC^H - (AB_2)^H CC^H$$

$$= XCC^H - XCC^H = 0$$

Berarti $(X - A^g)C = 0$ .... (4)

Dalam ini matriks C memiliki kolom-kolom ortogonal terhadap kolom pada matriks A. Dari persamaan (3) dan (4) menunjukkan bahwa $(X - A^g) = 0$ oleh karena itu $c = A^g$ yang menunjukkan sifat ketunggalan dari A^g .

Diberikan matriks A, beberapa metode menentukan pseudoinvers matriks A yang dinotasikan dengan A^g , antara lain

1. Metode Langsung (Direct Method)

   Metode ini dikemukakan oleh Henstenes (1958) dengan menggunakan skema untuk invers semu suatu matriks melalui proses yang disebut biorthogonal. Proses ini dapat diperluas dan dimodifikasi untuk semua matriks berordo nxm atau matriks persegi panjang. Konsep biorthogonal matriks dapat dijelaskan sebagai berikut diberikan vektor $u_1, u_2, ..., u_n$ dapat dianggap vektor kolom dari matriks U dan $v_i, v_2, ... ,v_n$ vektor-vektor baris dari matriks V, maka matriks U dan V dikatakan biorthogonal jika VU = I, apabila matriks U dan V berordo n maka matriks V dapat dikatakan sebagai invers dari matriks U.

   Proses perhitungan pada metode ini yaitu diberikan matriks A berordo nxm dengan (m > n) misalkan dua himpunan vektor $u_1 , u_2 , ... , u_m$ dan $v_1 , v_2 , ... , v_m$ pada ruang vektor berdimensi m ($m \geq n$), membentuk sistem orthogonal. Vektor-vektor tersebut diperoleh dari hasil modifikasi vektor tersebut dengan penambahan baris pada matriks sedemikian berordo lebih besar atau sama dengan m, selanjutnya menggunakan proses berikut

   a. Tentukan $c_{kk} = \left\langle v_k^{(k-1)}, u_k \right\rangle$ dengan $\left\langle a,b \right\rangle = a^T b$
   b. $c_k = c_{kk}^{-1}$
   c. $c_{jk} = \left\langle v_j^{(k-1)}, u_k \right\rangle, j \neq k$
   d. $v^{(k)} = c_k v^{(k-1)}$

      Dengan $c_{kk}^{(k)} = (c_{kk})^T$, $c_{ik}^{(k)} = -c_{ik}.c_k$ untuk $i \neq k$,

      Dalam hal ini dapat berlaku jika $c_{kk} \neq 0$
   e. Invers tergeneralisisr diperoleh dengan menghapus dua kolom terakhir dari $V^{(n)}$

   Contoh 1.

   Hitunglah matriks invers tergeneralisir matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

   Penyelesaian:

Untuk menentukan matriks invers semu dari matriks A, langkah pertama yaitu menambahkan dua baris pada matriks A sedemikian semua baris matriks A ortogonal dengan baris tambahan tersebut, misalkan hasil penambahan baris membentuk matriks U sebagai berikut

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

vektor-vektor kolom matriks U : u_1= (1 , 0, -1, 1, 0) , u_2 = (0 , -1, 1, 0, -1) , u_3= (-1 , 1 , 0, 0, -1) , u_4 = (1 , 0 , -1, -1, -1).dan matriks $V^{(0)} = U^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

dengan vektor-vektor baris matriks $V^{(0)}$ adalah $v_1^{(0)}$ = (1 , 0, -1, 1, 0) , $v_2^{(0)}$ = (0 , -1, 1, 0, -1) , $v_3^{(0)}$ = (-1, 1, 0, 0, -1) , dan $v_4^{(0)}$ = (1 , 0 , -1, -1, -1).

Preoses perhitungan selanjutnya menentukan $V^{(1)}$,

a. Tentukan $c_{11} = \left\langle v_1^{(0)}, u_1 \right\rangle$ = <(1 , 0, -1, 1, 0) , (1 , 0, -1, 1, 0) >

C_{11} = (1 , 0, -1, 1, 0)^T . (1 , 0, -1, 1, 0) = 3

diperoleh $c_{11}^{(1)} = (c_{11})^{-1} = \dfrac{1}{3}$,

b. $c_{21} = \left\langle v_2^{(0)}, u_1 \right\rangle$= < (0 , -1, 1, 0, -1) , (1 , 0, -1, 1, 0) > = (0 , -1, 1, 0, -1)^T (1 , 0, -1, 1, 0) = -1

$c_{31} = \left\langle v_3^{(0)}, u_1 \right\rangle$ = < (-1, 1, 0, 0, -1), (1 , 0, -1, 1, 0) > = (-1, 1, 0, 0, -1)^T (1 , 0, -1, 1, 0) = -1

$c_{41} = \left\langle v_4^{(0)}, u_1 \right\rangle$= < (1 , 0 , -1, -1, -1), (1 , 0, -1, 1, 0) > = (1 , 0 , -1, -1, -1)^T (1 , 0, -1, 1, 0) = 1

Diperoleh $c_{21}^{(1)} = -c_{11}^{(1)}.c_{21} = \dfrac{1}{3}$, $c_{31}^{(1)} = -c_{11}^{(1)}.c_{31} = \dfrac{1}{3}$, $c_{41}^{(1)} = -c_{11}^{(1)}.c_{41} = -\dfrac{1}{3}$

Sehingga matriks $C^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. Menentukan matriks $v^{(1)} = c_1 v^{(1-1)} = c_1 v^{(0)}$

$$V^{(1)} = C^{(1)}.V^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya mengulangi proses diatas untuk menghitung $V^{(2)}$ diperoleh

$c_{22} = \left\langle v_2^{(1)}, u_2 \right\rangle = \dfrac{4}{3}$, diperoleh $c_{22}^{(2)} = \left(c_{22}\right)^{-1} = \dfrac{3}{4}$

$c_{j2} = \left\langle v_j^{(1)}, u_2 \right\rangle$

$$c_{12} = \left\langle v_1^{(1)}, u_2 \right\rangle = <\left(\tfrac{1}{3}, \quad 0, \quad -\tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{1}{3}, \quad 0\right), \left(0, \quad -1, \quad 1, \quad 0, \quad -1\right)> = -\frac{1}{3}$$

$$c_{32} = \left\langle v_3^{(1)}, u_2 \right\rangle = <\left(\tfrac{-2}{3}, \quad 1, \quad -\tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{1}{3}, \quad -1\right), \left(0, \quad -1, \quad 1, \quad 0, \quad -1\right)> = -\frac{1}{3}$$

$$c_{42} = \left\langle v_4^{(1)}, u_2 \right\rangle = <\left(\tfrac{2}{3},\ 0,\ -\tfrac{2}{3},\ \tfrac{4}{3},\ -1\right), \left(0,\ -1,\ 1,\ 0,\ -1\right)> = \frac{1}{3}$$

Diperoleh $c_{12}^{(2)} = -c_{22}^{(2)}.c_{12} = \frac{1}{4}$

$c_{32}^{(2)} = -c_{22}^{(2)}.c_{32} = -\frac{3}{4}.(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{4}$, $c_{42}^{(2)} = -c_{22}^{(2)}.c_{42} = -\frac{3}{4}.\frac{1}{3} = -\frac{1}{4}$

Sehingga matriks $C^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$V^{(2)} = C^{(2)}.V^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{2}{12} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{7}{12} & \frac{3}{4} & -\frac{2}{12} & \frac{5}{12} & -\frac{5}{4} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{6} & -\frac{17}{12} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya mengulangi proses diatas untuk menghitung $V^{(3)}$, dan berhenti pada perhitungan $V^{(4)}$

Dengan $v^{(4)} = c^{(4)}v^{(3)}$ diperoleh $V^{(4)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{15} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{15} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

Invers semu diperoleh dengan menghapus dua kolom terakhir dari $V^{(4)}$, sehingga diperoleh matriks $A^g = V^{(4)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{15} \\ -\frac{4}{15} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & -5 & 4 \\ -4 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Pada metode tersebut terdapat kelemahan apabila matriksnya berukuran besar.

2. Metode Iterasi (Iterative Method)
   Metode ini dikemukakan oleh Grevillle,1960 dengan menggunakan algoritma ringkas. Adapun Algoritma perhitungan invers suatu matriks A sebagai berikut,
   Misalkan a_k notasi kolom ke k dari matriks A, dan A_k notasi matriks yang memuat k pertama. Matriks $A_k$membentuk matriks partisi (A_k, a_k).

   Selanjutnya menghitung $d_k = A_{k-1}^{+}a_k$ dan $c_k = a_k - A_{k-1}d_k$

   Jika $c_k = 0$, dengan $b_k = \left(1 + d_k^T d_k\right)^{-1} d_k^T A_{k-1}^{+}$, maka diperoleh $A_k^T = \begin{pmatrix} A_{k-1}^{+} - d_k b_k \\ b_k \end{pmatrix}$

   Untuk mengawali proses selanjutnya, dihitung $A_1^{+} = 0$ jika $a_1$vektor nol, dan jika vektor $a_1 \neq 0$ maka $A_1^{+} = \left(a_1^T a_1\right)^{-1} a_1^T$

   Contoh 2

   Pada contoh 1 selanjutnya akan dihitung matriks A^g dengan metode iterasi.
   Dalam hal ini perhitungannya dengan meggunakan bantuan MALTAB

```
A=[1 0- 1 1;0 -1 1 0; -1 1 0 -1];
>> Ag1=inv([1 0 -1]*[1;0;-1])*[1 0 -1];
>> d2=Ag1*[0 ;-1; 1];
>> c2=[0;-1;1]-[1;0;-1]*d2;
>> b2=(inv(transpose(c2)*c2))*transpose(c2);
```

```
>> Ag2=[A1-d2*b2;b2];
>> d3=A2*[-1;1;0];
>> c3=[-1;1;0]-[1 0 ; 0 -1; -1 1]*d3;
>> b3=inv(1+transpose(d3)*d3)*transpose(d3)*A2;
b3 =
   -0.3333    0.3333    0.0000
>> Ag3=[A2-d3*b3;b3]
A3 =
    0.3333         0   -0.3333
         0   -0.3333    0.3333
   -0.3333    0.3333    0.0000

>> d4=A3*[1;0;-1];
>> c4=[1;0;-1]-[1 0 -1;0 -1  1;-1 1 0]*d4;
>> b4=inv(1+transpose(d4)*d4)*transpose(d4)*A3;
>> Ag4=[A3-d4*b4;b4]
Ag4 =
    0.2000         0   -0.2000
    0.0667   -0.3333    0.2667
   -0.2667    0.3333   -0.0667
    0.2000         0   -0.2000
```

Perhitungan berhenti pada Ag4 yang tidak lain adalah invers semu atau pseudoinvers matriks A yaitu

$$A^g = \begin{bmatrix} 0,2000 & 0 & -0,2000 \\ 0,0667 & -0,3333 & 0,2667 \\ -0,2667 & 0,3333 & -0,0667 \\ 0,2000 & 0 & -0,2000 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa pada kedua metode tersebut menghasilkan A^g yang sama.

Algoritma pada metode iterasi ini lebih mudah perhitungannya dan lebih mudah diikuti.

2. Aplikasi invers tergeneralisisr pada analisis regresi linear berganda

Salah satu penerapan matriks invers semu atau pseudoinvers yaitu pada analisis regresi linear berganda dalam hal ini yaitu menentukan matriks koefisien pada model regresi.

Jika suatu vareabel terikat Y dipengaruhi oleh vareabel bebas bebas x_1, x_2, ... x_p maka bentuk umum model

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_p x_p + e$$

Pada teori statistika bahwa untuk menentukan matriks koefisien β dengan formulasi $\beta = (X^T X)^{-1}.X^T.Y$ berasarkan data yang diketahui dengan asumsi jumlah data n > p sehingga matriksnya rank kolom penuh, sehingga menurut teorema invers semu atau pseudoinvers bahwa $(X^T X)^{-1}.X^T = X^g$, penaksir koefisien β dengan menggunakan persamaan $\beta = X^g.Y$ dalam hal ini mengingat sifat ketunggalan dari matriks X^g

Koefisien βsebagai penaksir sehingga memenuhi sifat BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*) .

Contoh aplikasi

Diberikan data permintaan minyakgoreng yang dipengaruhi oleh harga minyak goreng dan pendapatan konsumen per bulan, sebagai berikut

No	Permintaan dlm Ltr	Harga minyak / liter	Pendapatan per bulan
1	3	8	9
2	4	7	9
3	5	7	8
4	6	7	5
5	6	6	4
6	7	6	5
7	8	6	6
8	9	6	7
9	10	5	4
10	10	4	3

Tentukan bentuk estimasi model regresinya.

Penyelesaian : Dibentuk matriks koefisien $X = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 1 & 7 & 9 \\ 1 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 5 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \\ 1 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, matiks hasil $Y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$

Pada perhitungan dalam hal ini dengan menggunakan bantuan MATLAB , untuk koefisien β dengan formulasi $\beta = X^g.Y = (X^TX)^{-1}.X^T.Y$

```
>> X=[1 8 9 ; 1 7 9 ; 1 7 8 ; 1 7 5 ; 1 6 4 ;1 6 5; 1 6 6; 1 6 7; 1 5 4; 1 4 3 ];
>> Y=[3; 4; 5; 6; 6; 7; 8; 9; 10; 10];
>> Xg=inv(transpose(X)*X)*transpose(X);
>> B = Xg*Y
B =
  18.8971
  -1.9559
   0.0049
```

Sehingga diperoleh bentuk estimasi model regresi adalah

$$\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

$$\hat{Y} = 18,8971 - 1,9559 x_1 + 0,0049 x_2$$

4. KESIMPULAN

Invers semu suatu matriks perluasan dari invers matriks berordo n singular maupun invers matriks beordo nxm dalam hal ini inversnya tidak tunggal.Karena konsep invers matriks banyak diaplikasikan pada masalah real sehingga pada pengembangannya invers tergeneralisir yang memenuhi keempat sifat yang ada yang nantinya disebut invers semu atau pseudoinvers yang bersifat tunggal.

Metode menentukan invers semu yang sering digunakan yaitu metode iterasi.Pada aplikasi di model analisis regresi linear berganda dalam hal ini digunakan untuk menaksir koefisien regresi dengan formulasi $\hat{\beta} = X^g Y$ dengan X^g invers semu dari matriks koefisien yaitu matriks X, $\hat{\beta} = X^g Y$ sebagai penaksir βmemenuhi sifat BLUE *(Best Linear Unbiased Estimator*)

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H and Rorres, C, 2004, *Elementary Linear Algebra : Application Version*, John Wiley & Sons, Inc, New York

Anton, H, 1992, *Elementary Linear Algebra*, John Willey & Sons, Inc.

Ben-Israel, Adi And Greville, Thomas NE, 2003, *Generalized Inverses Teory and Aplications,* New York : Springer - Verlag

Leon, S. J, 2001, *Linear Algebra With Applications, Prentice – Hall, Inc.*

Sembiring, RK, 2003, *Analisis Regresi*, Edisi kedua, ITB, Bandung

Setiadji, 2006, Matriks Inverg tergeneralisir, Pascasarjana UGM, Yogyakarta

Suryowati, K. dan Harmastuti, 2013, *Aljabar Linear*, Akprind Press, Yogyakarta

.