
Stabilisasi Sistem Kontrol Bilinier Dengan Gangguan Menggunakan Linierisasi Eksak Dan *Backstepping*

Khozin Mu'tamar¹, Janson Naiborhu², Roberd Saragih³

^{1,2,3}Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Bandung 40132, Indonesia

e-mail: mutamar.khozin@students.itb.ac.id¹, janson@math.itb.ac.id², roberd@math.itb.ac.id³

ABSTRACT

The bilinear control systems are widely used in engineering and chemistry to model dynamics because it has better approach and performance than linear control systems. However, assumptions and limitations in modeling will result in uncertainty factors, namely in the form of uncertain parameters and disturbance functions. This article discusses the control design of a second-order bilinear control system in the presence of a noise function. It is assumed that the system has a relative degree of 2 and the noise function only affects the dynamics with the control function. The bilinear control system is assumed to have a relative degree of two so that it can be transformed exactly into a normal form using a feedback transformation. The control design is based on a linear system using the backstepping method. The simulation results show that the control function obtained can carry the system output from the starting point to the origin in a relatively short time.

Keywords : *backstepping, relative degree, noise function, bilinear control system, feedback linearization*

INTISARI

Sistem kontrol bilinear banyak digunakan dalam teknik dan kimia untuk memodelkan dinamika karena memiliki pendekatan dan kinerja yang lebih baik daripada sistem kontrol linier. Namun asumsi dan keterbatasan dalam pemodelan akan menghasilkan faktor ketidakpastian, yaitu berupa parameter tak tentu dan fungsi gangguan. Pada artikel ini dibahas tentang desain kontrol pada sistem kontrol bilinier berorde dua dengan adanya fungsi gangguan. Diasumsikan sistem memiliki derajat relatif dua dan fungsi gangguan hanya berpengaruh pada dinamik variabel keadaan yang dikontrol. Sistem kontrol bilinier diasumsikan memiliki derajat relatif dua sehingga dapat ditransformasi secara eksak menjadi bentuk normal menggunakan transformasi umpan balik. Desain kontrol dilakukan berdasarkan sistem linier menggunakan metode backstepping. Hasil simulasi menunjukkan bahwa fungsi kontrol yang diperoleh dapat membawa luaran sistem dari titik awal menuju titik asal dalam waktu yang relatif singkat.

Kata kunci : *backstepping, derajat relatif, fungsi gangguan, kontrol bilinear, linierisasi umpan balik*

PENDAHULUAN

Sistem kontrol bilinier merupakan salah satu bentuk sistem kontrol taklinier yang paling sederhana yang diperkenalkan oleh Mohler (Elliott, 2009). Kajian mendalam tentang sistem kontrol bilinier dapat dijumpai pada (Mohler, 1973) dan (Bruni dkk., 1974). Sistem ini banyak digunakan dalam bidang teknik dan sosial karena sistem ini memiliki kelebihan dibandingkan sistem kontrol linier. Sistem kontrol bilinier dapat menghampiri sistem kontrol taklinier lebih baik dibandingkan sistem kontrol linier dan memiliki performa yang baik linier (Gerard dkk., 2010). Beberapa contoh penggunaan sistem kontrol bilinier dewasa ini dapat dilihat pada (Ramezanpour dkk., 2012) untuk penggunaan kontrol optimal secara iteratif pada sistem kontrol bilinier, pada (Bichiou dkk., 2018) yang mengaplikasikan kontrol optimum pada *boost converter*, dan pada (Nguyen dkk., 2019) untuk pemodelan dan kontrol gerak kapal.

Penerapan sistem kontrol bilinier pada permasalahan nyata merupakan salah satu proses dalam pemodelan. Dalam proses pemodelan seringkali dilakukan penyederhanaan dan juga terdapat beberapa parameter model yang nilainya tidak diketahui secara pasti. Hal ini menyebabkan adanya ketidakpastian pada model matematika (Shi dkk., 1999). Pada (Shi dkk., 1999), faktor

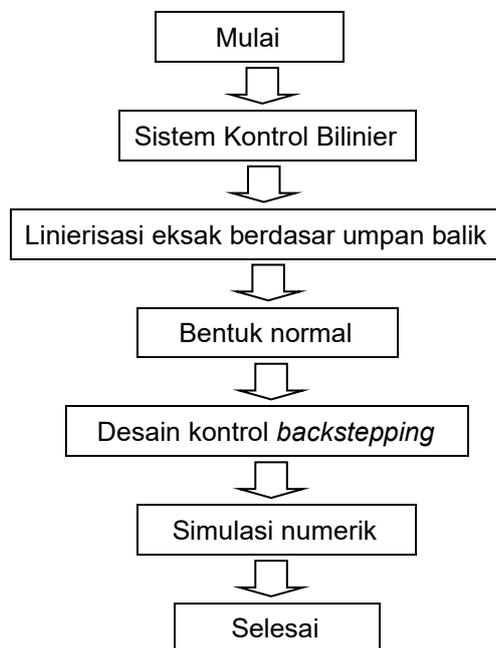
ketidakpastian dapat dinyatakan dengan parameter tertentu dan menggunakan fungsi gangguan pada sistem. Pada (Gerard dkk., 2010), fungsi gangguan diasumsikan tidak terjadi pada sistem melainkan pada luaran sistem dan kontrol didesain menggunakan metode *robust*. Pada (Kim & Lim, 2003), juga digunakan kontrol *robust* dengan fungsi biaya berupa fungsi Lyapunov serta menggunakan hampiran untuk menghitung nilai persamaan Riccati.

Pada artikel ini dibahas tentang desain kontrol untuk stabilisasi sistem kontrol bilinear dengan fungsi gangguan. Sistem diasumsikan memiliki derajat relatif dua sehingga sistem dapat ditransformasi secara eksak menggunakan transformasi umpan balik masukan-luaran menjadi sistem normal. Fungsi gangguan diasumsikan hanya terdapat pada variabel yang mengandung fungsi kontrol. Fungsi gangguan juga diasumsikan diketahui dan nilainya terbatas. Desain kontrol dilakukan dengan metode *backstepping* yang didesain berdasarkan sistem hasil transformasi menggunakan umpan balik masukan-luaran.

Artikel ini disusun dengan sistematika berikut. Setelah ini, diberikan metode penelitian yang menerangkan tahapan dalam penelitian dan teori yang digunakan. Berikutnya adalah hasil dan pembahasan yang berisi hasil utama dalam penelitian. Pada hasil utama dijelaskan desain kontrol dan kestabilan yang diperoleh dari sistem yang diteliti. Simulasi numerik dengan dua contoh juga diberikan pada bagian ini. Terakhir adalah kesimpulan yang merangkum seluruh bagian dari artikel.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilaksanakan secara studi literatur dan simulasi komputasi. Objek yang menjadi bahan penelitian adalah sistem kontrol bilinear yang mengandung fungsi gangguan. Secara garis besar, prosedur penelitian dilakukan berdasarkan tahapan pada Gambar 1.



Gambar 1. Alur tahapan penelitian desain kontrol bilinear

Sistem kontrol bilinear yang mengandung fungsi gangguan akan dilinierisasi menggunakan teknik *input-output feedback linearization* (IOFL) menjadi bentuk normal. Berdasarkan bentuk normal yang diperoleh, didesain fungsi kontrol yang menstabilkan sistem kontrol bilinear menggunakan metode *backstepping*. Metode ini dilakukan secara iteratif dengan melakukan transformasi variabel kontrol virtual dan variabel keadaan yang baru dengan terus memperhatikan kestabilan menggunakan fungsi Lyapunov. Fungsi kontrol yang telah diperoleh akan dikembalikan ke sistem awal menggunakan transformasi yang telah didefinisikan. Hasil ini kemudian disimulasikan untuk melihat dinamika variabel keadaan yang telah dikontrol.

Beberapa teori diperlukan untuk menyelesaikan penelitian ini, meliputi *input-output feedback linearization* (IOFL) dan kontrol *backstepping*. Misalkan diberikan fungsi kontrol taklinier,

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + u(t)g(x(t)) \quad (1)$$

dengan $f(x) \in \mathbb{R}^n$ adalah fungsi keadaan, $g(x) \in \mathbb{R}^n$ adalah fungsi faktor kontrol, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ adalah variabel keadaan, $u(t) \in \mathbb{R}$ adalah fungsi kontrol dan luaran sistem adalah $y = h(x)$. Turunan luaran $y(t)$ terhadap t menghasilkan

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} (f(x) + ug(x))$$

Selanjutnya, didefinisikan turunan Lie dari luaran sistem terhadap variabel keadaan $L_f h(x) = \nabla h \cdot f$ dan $L_g h(x) = \nabla h \cdot g$. Didefinisikan bilangan derajat relatif $1 \leq \rho \in \mathbb{N} \leq n$ merupakan bilangan yang memenuhi kondisi

$$\begin{cases} L_g L_f^{k-1} h(x) = 0 & , \quad k = 1, 2, \dots, \rho - 1 \\ L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0 \end{cases}$$

Diasumsikan bahwa sistem kontrol memiliki derajat relatif n . Didefinisikan transformasi yang mentransformasi sistem kontrol taklinier (1) menjadi bentuk normal

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Sistem normal diperoleh dengan menurunkan persamaan (2) terhadap t sehingga didapatkan

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ \vdots \\ L_f^n h(x) + u L_g L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ \alpha(z) + \beta(z)u \end{bmatrix} \quad (3)$$

dengan $\alpha(z) = L_f^n h(x)$ dan $\beta(z) = L_g L_f^{n-1} h(x)$. Dengan mendefinisikan variabel kontrol yang baru, persamaan (3) dapat dituliskan dengan

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (4)$$

dengan $v = \alpha(z) + \beta(z)u(t)$ merupakan variabel kontrol yang berlaku di sistem hasil transformasi pada persamaan (4) dan $u(t)$ merupakan fungsi kontrol yang digunakan pada sistem awal persamaan (1).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas tentang desain kontrol untuk sistem kontrol bilinear dengan fungsi gangguan menggunakan *backstepping* dan contoh simulasi.

1 Desain Kontrol

Diberikan sistem kontrol bilinear orde 2 dengan fungsi gangguan

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)Bx(t) + N\omega(t) \quad (5)$$

dengan $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $x(t) \in \mathbb{R}^2$ adalah fungsi keadaan, $u(t) \in \mathbb{R}$ adalah fungsi kontrol, $N \in \mathbb{R}^2$ adalah pembobot fungsi gangguan, $\omega(t) \in \mathbb{R}$ adalah fungsi gangguan dan luaran sistem diberikan oleh $y(t) = hx(t)$. Diasumsikan bahwa sistem memiliki derajat relatif 2 dan fungsi gangguan hanya berpengaruh pada variabel sistem yang mengandung kontrol.

Menggunakan persamaan (1) dimana $f(x) = Ax$ dan $g(x) = Bx$ diperoleh $L_f h(x) = hAx$ sehingga pemetaan persamaan (2) menjadi

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} h \\ hA \end{bmatrix} x \quad (6)$$

Bentuk normal dari sistem persamaan (5) dengan transformasi (6) adalah

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = \alpha(\mathbf{z}) + u(t)\beta(\mathbf{z}) + \hat{n}\omega(t) \end{cases} \quad (7)$$

dengan $\alpha(\mathbf{z}) = \mathbf{hA}^2\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}$, $\beta(\mathbf{z}) = \mathbf{hABT}^{-1}\mathbf{z}$ dan $\hat{n} = \mathbf{hAN}$.

Selanjutnya adalah menstabilkan persamaan (7) dengan menggunakan metode *backstepping*. Langkah pertama adalah menstabilkan variabel keadaan z_1 dengan menggunakan variabel kontrol virtual z_2 . Pilih fungsi Lyapunov $V_1(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}z_1^2$. Turunan fungsi Lyapunov $V_1(\mathbf{z})$ terhadap t sehingga menghasilkan

$$\dot{V}_1(\mathbf{z}) = z_1 z_2$$

Untuk menstabilkan z_1 maka haruslah $\dot{V}_1(\mathbf{z}) < 0$ untuk setiap $t \geq 0$. Misalkan $\dot{V}_1(\mathbf{z}) = -r_1 z_1^2$ untuk suatu $r_1 \in \mathbb{R}^+$ maka didapatkan $z_2 = -r_1 z_1$. Didefinisikan variabel keadaan baru

$$w = z_2 + r_1 z_1. \quad (8)$$

Substitusikan persamaan (8) pada persamaan (7) akan menghasilkan

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = w - r_1 z_1 \\ \dot{z}_2 = \alpha(z_1, w) + u(t)\beta(z_1, w) + \hat{n}\omega(t) \end{cases} \quad (9)$$

Turunkan persamaan (8) terhadap t ,

$$\dot{w} = \dot{z}_2 + r_1(w - r_1 z_1)$$

lalu substitusikan pada persamaan (9) untuk menghasilkan sistem baru dalam koordinat (z_1, w)

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = w - r_1 z_1 \\ \dot{w} = r_1(w - r_1 z_1) + \alpha(z_1, w) + u(t)\beta(z_1, w) + \hat{n}\omega(t) \end{cases} \quad (10)$$

Langkah kedua adalah menstabilkan seluruh sistem persamaan (10) menggunakan kontrol $u(t)$. Didefinisikan fungsi Lyapunov $V_2(z_1, w) = \frac{z_1^2 + w^2}{2}$. Turunan persamaan Lyapunov $V_2(z_1, w)$ terhadap t sehingga dihasilkan

$$\dot{V}_2(z_1, w) = z_1 \dot{z}_1 + w \dot{w}. \quad (11)$$

Menggunakan persamaan (10), persamaan (11) akan menjadi

$$\dot{V}_2(z_2, w) = -r_1 z_1^2 + w(z_1 + r_1(w - r_1 z_1) + \alpha(z_1, w) + u(t)\beta(z_1, w)) + w\hat{n}\omega(t) \quad (12)$$

Untuk menstabilkan seluruh sistem, perlu ditentukan nilai kontrol $u(t)$ agar $\dot{V}_2(z_2, w) < 0$ untuk setiap t . Diasumsikan terpenuhi $\dot{V}_2(z_2, w) = -r_1 z_1^2 - r_2 w^2 - \psi^2$ untuk suatu $r_1, r_2, \psi \in \mathbb{R}^+$ maka didapatkan

$$z_1 + r_1(w - r_1 z_1) + \alpha(z_1, w) + u(t)\beta(z_1, w) = -r_2 w + \theta \quad (13)$$

dengan θ adalah fungsi yang perlu ditentukan agar $\dot{V}_2(z_2, w) < 0$. Menggunakan persamaan (13), persamaan kontrol yang menstabilkan persamaan (10) adalah

$$u(t) = \frac{-\alpha(z_1, w) - z_1 - r_1(w - r_1 z_1) - r_2 w + \theta}{\beta(z_1, w)} \quad (14)$$

Selanjutnya adalah menentukan nilai θ yang memenuhi kondisi yang dibutuhkan. Substitusikan persamaan (13) pada persamaan (12) akan dihasilkan

$$\dot{V}_2(z_2, w) = -r_1 z_1^2 - r_2 w^2 + w(\hat{n}\omega(t) + \theta) \quad (15)$$

Nilai θ yang sesuai adalah nilai yang membuat $\dot{V}_2(z_2, w) < 0$ selalu terpenuhi. Perhatikan bahwa $w(\hat{n}\omega(t) + \theta) < 0$ dipenuhi oleh dua suku persamaan yaitu w dan $\hat{n}\omega(t) + \theta$.

- Jika $w < 0$ maka haruslah $\hat{n}\omega(t) + \theta > 0$. Jika nilai $\hat{n}\omega(t) > 0$ maka $\theta = |\hat{n}|\omega_{max}$ memenuhi kondisi $\hat{n}\omega(t) + \theta > 0$. Sebaliknya, jika $\hat{n}\omega(t) < 0$ maka menggunakan $\theta =$

$|\hat{n}|\omega_{max}$ kondisi $\hat{n}\omega(t) + \theta > 0$ masih terpenuhi karena $\omega(t)_{max}$ untuk setiap $t \geq 0$. Jadi, nilai θ yang memenuhi untuk kasus ini adalah $\theta = |\hat{n}|\omega_{max}$

- Jika $w > 0$ maka haruslah $\hat{n}\omega(t) + \theta < 0$. Jika nilai $\hat{n}\omega(t) > 0$ maka $\theta = -|\hat{n}|\omega_{max}$ memenuhi kondisi $\hat{n}\omega(t) + \theta < 0$ karena $\omega(t)_{max}$. Sebaliknya, jika $\hat{n}\omega(t) < 0$ maka menggunakan $\theta = -|\hat{n}|\omega_{max}$ kondisi $\hat{n}\omega(t) + \theta < 0$ masih terpenuhi. Jadi, nilai θ yang memenuhi untuk kasus ini adalah $\theta = -|\hat{n}|\omega_{max}$

Berdasarkan kedua kondisi ini, nilai θ yang sesuai adalah

$$\theta = -\text{sign}(w)|\hat{n}|\omega_{max} \quad (16)$$

Substitusikan nilai θ persamaan (16) pada persamaan (15) sehingga dihasilkan

$$\dot{V}_2(z_2, w) = -r_1 z_1^2 - r_2 w^2 + w(\hat{n}\omega(t) - \text{sign}(w)|\hat{n}|\omega_{max}()) \quad (17)$$

Oleh karena $w = \text{sign}(w)|w|$ dan $\hat{n} = \text{sign}(\hat{n})|\hat{n}|$ maka persamaan (17) menjadi

$$\dot{V}_2(z_2, w) = -r_1 z_1^2 - r_2 w^2 + |w||\hat{n}|(\text{sign}(w)\text{sign}(\hat{n})\omega(t) - \omega_{max}())$$

Karena $\omega(t)_{max}$ untuk setiap $t \geq 0$ maka $\text{sign}(w)\text{sign}(\hat{n})\omega(t) - \omega_{max}$ dan mengakibatkan $\dot{V}_2(z_2, w) < 0$ untuk setiap $t \geq 0$.

Kontrol persamaan (14) merupakan kontrol yang berlaku untuk sistem persamaan (10). Untuk dapat digunakan bagi sistem (5), perlu dilakukan transformasi variabel baru ke variabel keadaan awal. Menggunakan transformasi pada persamaan (8) untuk transformasi (w, z_1) , persamaan (6) untuk transformasi variabel keadaan (z, x) serta nilai θ pada persamaan (16), didapatkan fungsi kontrol

$$u(t) = \frac{-\alpha(x) - [(1+r_1r_2) (r_1+r_2)]Tx - \text{sign}(|r_1 - 1|Tx)|\hat{n}|\omega_{max}}{\rho(x)} \quad (18)$$

3.1 Contoh simulasi

Contoh 1. Diberikan sistem kontrol bilinear $\dot{x} = Ax + uBx$ (Shi dkk., 1999) dengan

$$A = \begin{bmatrix} -0.046 & 0 \\ -0.763 & 3.197 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.027 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0.978 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

dan $\omega = 0.25 \sin(t)$. Luaran sistem adalah $y = x_2$ sehingga diperoleh derajat relatif dari masalah ini adalah 2. Transformasi menggunakan IOFL

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.763 & 3.197 \end{bmatrix} \quad (20)$$

menghasilkan bentuk normal dalam koordinat $z(t)$ yaitu

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = & z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} = & 0.147z_1 + 3.15z_2 + 0.0206u(4.19z_1 - 1.31z_2) - 0.187 \sin(t) \end{cases} \quad (21)$$

Misalkan dipilih $r_1 = 3$, persamaan (8) menjadi

$$w = z_2 + 3z_1. \quad (22)$$

dan persamaan (21) setelah z_1 distabilkan dapat ditulis menjadi

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = & w - 3z_1 \\ \frac{dw}{dt} = & 6.15w - 18.3z_1 + 0.0863uz_1 - 0.0270u(w - 3z_1) - 0.187 \sin(t) \end{cases} \quad (23)$$

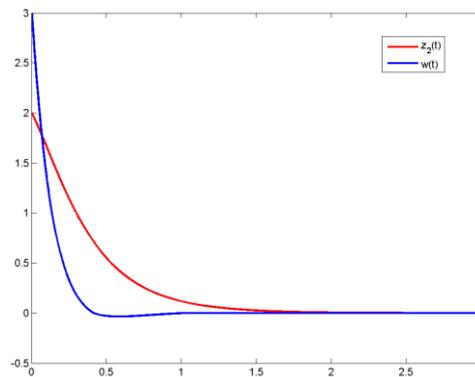
Berdasarkan $\omega = 0.25 \sin(t)$ dan N yang diberikan, nilai θ dari persamaan (16) yaitu

$$\theta = -0.187 \text{sign}(w). \quad (24)$$

Menggunakan $r_2 = 7$, fungsi kontrol persamaan (14), diaplikasikan pada persamaan (23), diperoleh sistem final yang telah distabilkan,

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = & w - 3z_1 \\ \frac{dw}{dt} = & -7w - z_1 - 0.187(\sin(t) + \text{sgn}(w)) \end{cases} \quad (25)$$

Dinamika perilaku variabel (z_1, w) persamaan (25) terhadap t ditunjukkan pada Gambar 2



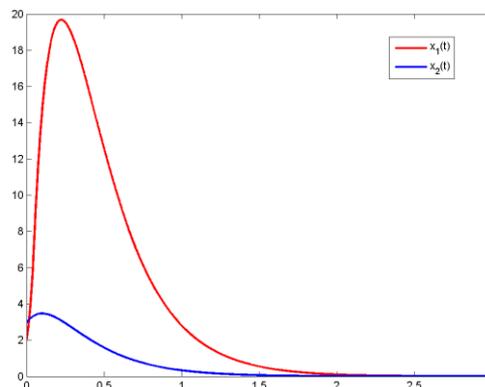
Gambar 2. Perilaku solusi sistem persamaan (25) yang telah distabilkan

Pada Gambar 2 tampak bahwa orbit variabel keadaan (z_1, w) bergerak dari nilai awal $\{z_1(0) = 2, w(0) = 3\}$ menuju titik origin secara asimtotik. Waktu yang dibutuhkan untuk stabil relatif singkat di $t \approx 2$. Namun, kestabilan variabel $w(t)$ lebih cepat dibandingkan variabel keadaan $z_1(t)$ dikarenakan pemilihan faktor konstanta $r_2 > r_1$. Hal ini dapat dilihat karena pada dinamik $\dot{x}(t) = ax(t)$ solusi analitiknya berbentuk $x(t) = x_0 e^{at}$ yang sangat dipengaruhi oleh nilai konstanta a . Sistem akan stabil asimtotik jika $a < 0$ dan semakin besar nilai $|a|$ maka solusi $x(t)$ akan semakin cepat menuju titik asal.

Menggunakan transformasi persamaan (20), nilai θ persamaan (24) dan transformasi persamaan (22), diperoleh kontrol untuk sistem awal berdasarkan persamaan (18), yaitu

$$u(t) = \frac{487x_1 - 3120x_2 - 9.06\text{sign}(6.197x_2 - 0.763x_1)}{x_1} \quad (26)$$

Perilaku sistem awal dengan kontrol persamaan (26) diberikan pada Gambar 3.



Gambar 3. Perilaku solusi sistem persamaan (19) yang telah distabilkan dengan menggunakan kontrol persamaan (26)

Pada Gambar 3, meskipun stabil asimtotik menuju titik asal, dinamika variabel keadaan sistem awal memiliki perberbedaan dengan dinamika sistem linier hasil kontrol. Pada sistem awal, kedua variabel keadaan bergerak dari nilai awal menjauhi titik asal di awal waktu. Namun, pada waktu $t \approx 0.3$ keduanya sudah bergerak turun menuju titik asal. Meskipun nilai awal $x_1(t)$ lebih kecil daripada $x_2(t)$, dinamika $x_2(t)$ bergerak lebih cepat dan mencapai titik maksimum lebih tinggi dibandingkan nilai $x_1(t)$. Hal ini dapat dijelaskan sebagai akibat adanya pengaruh fungsi gangguan yang bernilai positif dan monoton naik dan nilai kontrol persamaan (26) yang memberikan nilai positif di awal waktu. Walau kedua variabel bergerak menjauh namun keduanya sudah stabil di titik asal pada $t \approx 2$ yang bersesuaian juga dengan dinamika Gambar 2.

Contoh 2. Diberikan sistem kontrol bilinear $\dot{x} = Ax + uBx$ dengan (Ramezanpour dkk., 2012)

$$A = \begin{bmatrix} \frac{13}{6} & \frac{5}{12} \\ -\frac{50}{3} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

dan $\omega = 0.15 \cos(t)$. Luaran sistem adalah $y = x_2$ sehingga diperoleh derajat relatif dari masalah ini adalah 2. Transformasi menggunakan IOFL

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{50}{3} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \quad (28)$$

menghasilkan sistem baru dalam koordinat z yaitu

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = & z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} = & -1.17z_1 - 0.5z_2 + 16.7u(-0.160z_1 - 0.06z_2) - 1.25 \cos(t) \end{cases} \quad (29)$$

Misalkan digunakan $r_1 = 1$ maka menggunakan transformasi persamaan (8) diperoleh perubahan variabel

$$w = z_2 + z_1 \quad (30)$$

Persamaan (29) akan menjadi

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = & w - z_1 \\ \frac{dw}{dt} = & 0.5w - 1.67z_1 - 2.67uz_1 - u(w - z_1) - 1.25 \cos(t) \end{cases} \quad (31)$$

Berdasarkan $\omega = 0.15 \cos(t)$, persamaan (16) menjadi

$$\theta = -1.25 \text{sign}(w). \quad (32)$$

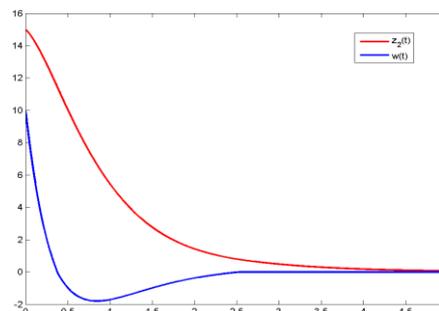
Menggunakan $r_2 = 3$ dan θ persamaan (32), diperoleh kontrol yang menstabilkan persamaan (31) yaitu

$$u = \frac{0.667z_1 - 3.50w - 1.25 \text{sign}(w)}{-1.67z_1 - w} \quad (33)$$

Sistem baru dari persamaan (31) yang telah distabilkan oleh kontrol persamaan (33) diberikan oleh

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = & w - z_1 \\ \frac{dw}{dt} = & -3w - z_1 - 1.25(\cos(t) + \text{sign}(w)) \end{cases} \quad (34)$$

Dinamika variabel keadaan (z_1, w) persamaan (34) ditunjukkan pada Gambar 4.



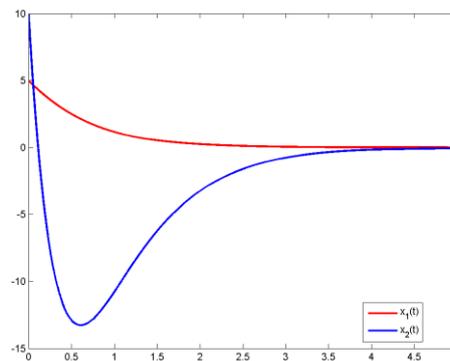
Gambar 4. Perilaku solusi sistem persamaan (34) yang telah distabilkan

Pada Gambar 4, kedua variabel keadaan stabil asimtotik di titik asal. Variabel $z_1(t)$ bergerak secara eksponensial dari titik awal menuju titik asal sedangkan variabel $w(t)$ mengalami sedikit osilasi pada awal simulasi. Hal ini disebabkan oleh adanya pengaruh fungsi gangguan sebesar $-1,25 \cos(t)$ yang mengakibatkan perilaku osilasi. Berbeda dengan Gambar 2 karena perbandingan nilai koefisien $w(t)$ dan fungsi gangguan yang cukup signifikan sehingga osilasi dapat ditekan oleh nilai variabel $w(t)$ yang sangat cepat menuju titik asal.

Berdasarkan transformasi persamaan (28) dan persamaan (30), kontrol persamaan (33) yang akan digunakan dalam sistem awal persamaan (27) diberikan oleh

$$u(t) = -\frac{1}{200} \frac{-78x_2 - 700x_1 + 15 \operatorname{sign}\left(-\frac{5}{3}x_2 - \frac{50}{3}x_1\right)}{x_1} \quad (35)$$

Dinamika variabel keadaan (x_1, x_2) terhadap t persamaan (27) yang telah distabilkan menggunakan kontrol persamaan (35) ditunjukkan pada Gambar 5.



Gambar 5. Perilaku solusi sistem persamaan (27) yang telah distabilkan menggunakan kontrol persamaan (35)

Jika dibandingkan dengan perilaku sistem awal Gambar 3, pada contoh ini sistem awal memiliki perilaku yang jauh berbeda. Variabel keadaan $x_1(t)$ langsung stabil asimtotik sejak awal simulasi sedangkan variabel keadaan $x_2(t)$ bergerak turun menjauhi titik asal baru kemudian kembali menuju titik asal. Berdasarkan permasalahan yang diberikan, variabel keadaan $x_2(t)$ tidak secara langsung berhubungan dengan variabel kontrol $u(t)$. Hal ini menyebabkan dinamika variabel keadaan $x_2(t)$ sepenuhnya hanya dipengaruhi oleh variabel keadaan dan fungsi gangguan. Jika dibandingkan dengan Gambar 4, kedua sistem telah menuju titik asal pada waktu yang sama yaitu $t \approx 4$ dan keduanya sama-sama memiliki variabel keadaan yang beresilasi di awal simulasi.

KESIMPULAN

Pada artikel ini telah dibahas mengenai stabilisasi sistem kontrol bilinear yang mengandung fungsi gangguan. Fungsi gangguan hanya mempengaruhi variabel keadaan yang mengandung fungsi kontrol. Fungsi kontrol didesain menggunakan metode *backstepping*. Pada metode *backstepping*, sistem yang diasumsikan memiliki derajat relatif 2 diubah menjadi bentuk normal menggunakan transformasi umpan balik masukan dan luaran. Kontrol didesain berdasarkan bentuk yang sudah ditransformasi dan kemudian diaplikasikan pada sistem awal. Pada simulasi telah diberikan dua contoh. Kedua contoh menunjukkan bahwa kontrol *backstepping* berhasil membawa variabel keadaan dari nilai awal yang dipilih menuju titik asal dalam waktu yang relatif singkat.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih disampaikan kepada pihak ITB yang memberikan pendanaan pada penelitian ini dalam Skema Riset ITB 2021. Juga terima kasih disampaikan kepada seluruh reviewer atas masukan perbaikan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

Bichiou, S., Bouafoura, M. K., & Braiek, N. B. (2018). Time optimal control laws for bilinear systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 1–10. <https://doi.org/10.1155/2018/5217427>

- Bruni, C., Dipillo, G., & Koch, G. (1974). Bilinear Systems: An Appealing Class of “Nearly Linear” Systems in Theory and Applications. *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, 19(4), 334–348.
- Elliott, D. L. (2009). *Bilinear Control Systems, Matrices in Action* (S. S. Antman, J. E. Marsden, & L. Sirovich, Ed.). Springer.
- Gerard, B., Ali, H. S., Zasadzinski, M., & Darouach, M. (2010). H-infinity filter for bilinear systems using LPV approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(7), 1688–1674. <https://doi.org/10.1109/TAC.2010.2046075>
- Kim, B. S., & Lim, M. T. (2003). Robust H ∞ Control Method for Bilinear Systems. *International Journal of Control Automation, and Systems*, 1(2), 171–177.
- Mohler, R. R. (1973). *Bilinear Control Processes With Applications to Engineering, Ecology, and Medicine*. Academic Press.
- Nguyen, H.-Q., Tran, A.-D., & Nguyen, T.-T. (2019). The Bilinear Model Predictive Method-Based Motion Control System of an Underactuated Ship with an Uncertain Model in the Disturbance. *Processes*, 7, 1–14. <https://doi.org/10.3390/pr7070445>
- Ramezanpour, H., Setayeshi, S., Arabalibeik, H., & Jajrami, A. (2012). An Iterative Procedure for Optimal Control of Bilinear Systems. *International Journal of Instrumentation and Control Systems*, 2(1), 1–10.
- Shi, P., Shue, S.-P., Shi, Y., & Agarwal, R. K. (1999). Controller design for bilinear systems with parametric uncertainties. *Mathematical problem in Engineering*, 4, 505–528.